中等职业学校考试复习指导丛书

数　　学

《中等职业学校考试复习指导丛书》编写组　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京・BEIJING

内 容 简 介

本书是以教育部颁发的《中等职业学校文化基础课程教学大纲》为依据，参照近几年山东省普通高校招生（春季）考试说明，并结合中等职业学校学生的实际需要而编写的。内容包括：集合与数理逻辑用语、方程与不等式、函数、数列、平面向量、三角、平面解析几何、立体几何、概率与统计初步等，旨在帮助学生掌握数学基础知识、基本技能、基本方法，提高运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，以及运用所学数学知识、思想、方法分析问题和解决问题的能力。每章都有复习要求、知识框图、知识要点、例题精选、习题和测试题，书后附有五套综合检测题，以及习题、测试题的答案与提示。

本书可供中等职业学校教师和学生使用，是中等职业学校学生系统复习数学知识、提高能力、迎接考试的理想用书。

图书在版编目（CIP）数据

中等职业学校考试复习指导丛书. 数学/《中等职业学校考试复习指导丛书》编写组编著. —北京：电子工业出版社，2018.10
ISBN 978-7-121-35014-6

Ⅰ. ①中…　Ⅱ. ①中…　Ⅲ. ①数学课－中等专业学校－升学参考资料　Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 209173 号

责任编辑：崔汝泉　　特约编辑：陈　迪
印　　刷：山东汇文印务有限公司
装　　订：山东汇文印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：14.25　字数：356 千字
版　　次：2018 年 10 月第 1 版
印　　次：2018 年 10 月第 1 次印刷
定　　价：39.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：电话（010）88254407。

前　言

《中等职业学校考试复习指导丛书》是根据当前职业教育改革发展的形势，为满足中等职业学校广大教师和学生的需要，组织富有经验的专家、骨干教师编写的一套考试复习指导丛书。本丛书包括语文、数学和英语三册。

丛书的编写是以教育部颁发的《中等职业学校文化基础课程教学大纲》为依据，以山东省职业教育教材审定委员会审定的中等职业教育规划教材为主要参考，参照山东省近几年普通高校（春季）考试说明，结合山东省的实际情况，广泛征询了广大考生和教师的意见，并吸取当前教学改革的先进成果而编写的。在编写时，我们力求整合基础知识，强化能力训练，突出对学生解题思路和方法的引导，使学生学会分析问题和解决问题，提高学习能力和应对考试的能力。在内容编排上，三本书的模块大致为：复习要点，即明确需要掌握的知识点及其相关联系，提出复习的要求；解题示例，即选择典型例题、考试试题或某一类题型，分析总结规律，引导学生举一反三，掌握解题技巧；基础训练，即根据近几年本学科考试的主要内容，精心设计了一定数量的练习题，供学生们选择、训练，巩固知识，提高能力；综合检测，参照历年春季高考的试题，设计了 3~6 套综合检测题，用于学生强化训练，检测复习效果。同时，在采用统一模块的前提下，三门学科根据各自的特点，突出了学科特色，体现了灵活性。因此，本丛书具有较强的针对性、指导性和实用性，便于教师的指导和学生的系统复习，希望能对中等职业学校学生的日常学习及复习考试等方面有所帮助和指导。

由于时间仓促，水平有限，书中难免有不足之处，恳望广大师生在使用过程中提出宝贵意见，以便日后修改和完善。

编写组

2018 年 8 月

目标的坚定是性格中最必要的力量源泉之一，也是成功的利器之一。没有它，天才也会在矛盾无定的迷津中徒劳无功。

目　录

每一个成功者都有一个开始。勇于开始，才能找到成功的路。

第一章

集合与数理逻辑用语

【复习要求】

集合与数理逻辑用语是高中阶段数学的重要基础知识，是高考的必考内容．本章知识主要是：集合的运算，集合的有关术语和符号，命题的真假判定，对“且”“或”“非”命题的真假判定，充要条件的判定，逻辑联结词，全称量词与存在量词等基础性知识．考试题型多以选择题、填空题的形式出现．对集合与数理逻辑用语部分的复习要求如下：

1．理解集合的概念，掌握集合的表示法，掌握集合之间的关系（子集、真子集、相等），掌握集合的交、并、补运算．

2．理解符号 $\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\supseteq$、$\not\subseteq$、$\not\supseteq$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$\cap$、$\cup$、$\complement$、$\Rightarrow$、$\Leftrightarrow$ 的含义，并能用这些符号表示集合与集合、元素与集合、命题与命题之间的关系．

3．理解子集与推出的关系，能正确地区分充分、必要、充要条件．

4．了解命题的有关概念．

5．了解量词的有关概念，理解全称量词和存在量词的意义，并会用相应的符号表示．

6．理解逻辑联结词“且”“或”“非”的意义．

7．理解符号$\forall$、$\exists$、$\wedge$、$\vee$、$\neg$ 的含义．

【知识框图】

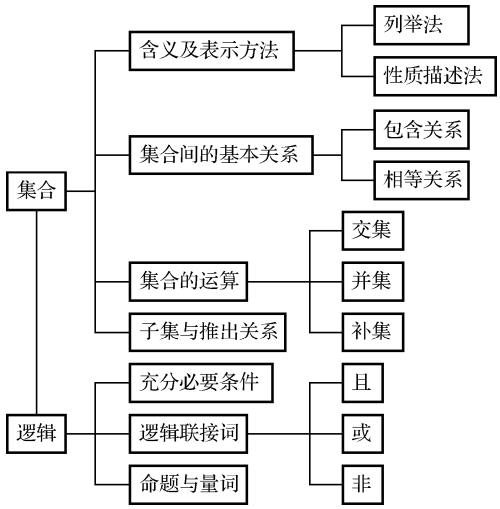


图 1-1

【知识要点】

1．构成集合的元素必须具有两个特性：确定性，互异性．

2．集合的表示方法常用的有：列举法，描述法．

注意：“{}”表示“全体”的意思．一般情况下，实数集记为 **R**，不能写成{全体实数}或{ **R** }．

3．常用数集及其记号：$\mathbf{N}_+$（或 $\mathbf{N}^*$）表示正整数集，**N** 表示自然数集，**Z** 表示整数集，**Q** 表示有理数集，**R** 表示实数集．

注意：$0\in\mathbf{N}$．

4．元素与集合之间的关系是从属关系，它们之间只能用符号“$\in$”或“$\notin$”联接．

5．集合与集合之间的关系有包含关系或非包含关系两种，表示两个集合之间的关系符号有“$\subseteq$”“$\supseteq$”“$\subsetneqq$”“$\supsetneqq$”“$=$”“$\not\subset$”和“$\not\supset$”．

注意：①空集用符号“$\varnothing$”表示，空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集．

②$A\subseteq B$ 包含 $A=B$ 或 $A\subsetneqq B$ 两种情况．

③含有 n 个元素的集合 A 的子集有 2^n 个，真子集有（2^n-1）个．

6．集合的运算

（1）交集：给定两个集合 A，B，由属于 A 且属于 B 的所有元素构成的集合，叫作 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$．

（2）并集：给定两个集合 A，B，由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素构成的集合，叫作 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$．

（3）补集：如果集合 A 是全集 U 的一个子集，由 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，

叫作 A 在 U 中的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U且x\notin A\}$.

7．充分条件与必要条件

假设 p 是条件，q 是结论.

（1）如果 $p\Rightarrow q$，则称 p 是 q 的充分条件.

（2）如果 $q\Rightarrow p$，则称 q 是 p 的必要条件.

（3）如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则称 p 与 q 互为充分且必要条件，记作 $p\Leftrightarrow q$．充分且必要条件可简称为充要条件.

8．子集与推出的关系

如果集合 $A=\{x\mid p\}$，$B=\{x\mid q\}$，那么 $A\subseteq B$ 与 $p\Rightarrow q$ 等价，$A=B$ 与 $p\Leftrightarrow q$ 等价.

9．量词

常用的量词有“全称量词”和“存在量词”.

（1）全称量词是指任意的，常用的全称量词有“所有”“一切”“每一个”“任何”等，用符号“∀”表示.

（2）存在量词是指“存在”，常用的存在量词为“存在”“有些”“至少有一个”等，用符号“∃”表示.

10．命题

（1）命题：能够判断真假的语句叫作命题.

①全称命题：含有全称量词的命题．如：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2\geqslant 0$.

②存在命题：含有存在量词的命题．如：$\exists x\in\mathbf{Z}$，使得 $x-2<0$.

（2）“且”“或”“非”等称为逻辑联结词.

（3）简单命题：不含逻辑联结词的命题叫作简单命题.

（4）复合命题：用逻辑联结词来联结简单命题构成的新命题叫作复合命题．对于任意的两个命题 p 和 q，“p 且 q”记作“$p\wedge q$”；“p 或 q”记作“$p\vee q$”；“非 p”记作“$\neg p$”.

（5）复合命题真值表见表 1-1.

表 1-1　复合命题真值表

p	q	$\neg p$	$P\wedge q$	$P\vee q$
真	真	假	真	真
真	假	假	假	真
假	真	真	假	真
假	假	真	假	假
总结		$\neg p$ 与 p 的真值相反	$p\wedge q$，都真才真 有假则假	$p\vee q$，有真则真 都假才假

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）已知集合 $M=\{a，b，c\}$ 中的元素对应着某三角形的三边长，那么这个三角形一定不是（　　）.

（A）直角三角形　（B）锐角三角形　　（C）钝角三角形　　（D）等腰三角形

分析：由集合中元素的互异性可知：a，b，c 必是三个互不相等的数，故选（D）.

（2）下列关系式中错误的是（　　）.

（A）$3\in\{x\mid x<5\}$　　（B）$\{3\}\subsetneqq\{x\mid x<5\}$

（C）$\{1,2\}\subseteq\{2,1\}$　　（D）$\varnothing\not\subseteq\{x\mid x<5\}$

分析：因为空集是任意集合的子集，故选（D）.

（3）若全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $M=\{2,3\}$，$N=\{3,4\}$，则集合 $\complement_U(M\cup N)$ 等于（　　）.

（A）$\{1,3\}$　　（B）$\{1,5\}$　　（C）$\{3,5\}$　　（D）$\{4,5\}$

分析：先求 $M\cup N=\{2,3,4\}$，再求 $\complement_U\{M\cup N\}=\{1,5\}$，故选（B）.

（4）集合 $P=\{x\mid -2<x<2\}$，$Q=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$，那 $P\cup Q=$（　　）.

（A）$\{x\mid -2<x<3\}$　　（B）$\{x\mid -2\leqslant x<1\}$

（C）$\{x\mid -1<x<3\}$　　（D）$\{x\mid 2<x<3\}$

分析：充分利用数轴的直观作用来解题，集合 P，Q 的范围如图 1-2 所示：

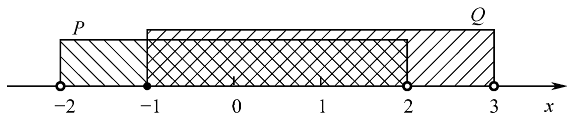


图 1-2

所以 $P\cup Q=\{x\mid -2<x<3\}$，故选（A）.

点评：对于不等式构成的集合，求其并集或交集时，可借助数轴求解，数形结合．并集涵盖所有的部分，交集只取公共部分，但要注意端点的值能否取到．

（5）集合 $K=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<4\}$ 的子集的个数是（　　）.

（A）16　　（B）15　　（C）8　　（D）7

分析：因为集合 $K=\{0,1,2,3\}$，含有 4 个元素，则子集的个数是 $2^4=16$，故选（A）.

点评：解题时首先要关注集合元素的取值范围，再充分运用“含有 n 个元素的集合的子集有 2^n 个，真子集有（2^n-1）个”这一结论来解题．

（6）设 p，q 是两个命题，并且 $\neg p\wedge q$ 是真命题，则下列命题为真命题的是（　　）.

（A）$p\wedge q$　　（B）$\neg p\wedge\neg q$　　（C）$\neg(p\vee q)$　　（D）$\neg p\vee\neg q$

分析：因为 $\neg p\wedge q$ 是真命题，所以 $\neg p$ 与 q 都是真命题，由此得出 p 假、$\neg q$ 假，注意到选项（D）是用“$\vee$”联结的，则 $\neg p$，$\neg q$ 中有真则真，而已知 $\neg p$ 真，故选（D）.

思考与讨论：请仿照上述分析的步骤来分析其余三个选项是否为真命题.

（7）设 a，$b\in\mathbf{R}$，则“$a>0$ 且 $b>0$”是“$ab>0$”的（　　）.

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

分析：由 $a>0$ 且 $b>0$ 可推出 $ab>0$；但由 $ab>0$ 可推出 $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}$，故选（A）.

（8）若 $\alpha\in\mathbf{R}$，则“$\sin\alpha<\cos\alpha$”是“$\alpha=0$”的（　　）.

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

分析：本题综合了充要条件与三角函数的知识，由$\alpha=0$ 可知 $\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=1$，所以$\sin\alpha<\cos\alpha$成立，但由$\sin\alpha<\cos\alpha$不一定推出$\alpha=0$，故选（B）.

思考：第（8）题的分析与第（7）题的分析相比，你更喜欢哪一种？你能把它们都改为自己喜欢的写法吗？

【例 2】写出下列命题的非命题，并判断所写出的命题的真假.

p：12 是 6 的倍数；　　　　　　　　　q：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x-1=0$；

r：平行四边形的对角线都互相垂直；　　s：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得$|x|<0$.

解：$\neg p$：12 不是 6 的倍数.（假）

$\neg q$：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x-1\neq 0$.（真）

$\neg r$：平行四边形的对角线不都互相垂直.（真）

$\neg s$：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$|x|\geqslant 0$.（真）

点评：因为原命题与其非命题是同一个条件下得出的相反的结论，所以它们必然是一真一假，不能同真（或同假）. 据此可以判断所写出的命题是否为原命题的非命题.

【例 3】设集合 $A=\{-1, 1, 3\}$，$B=\{m+2, m^2+4\}$，$A\cap B=\{3\}$，求实数 m 的值.

解：因为 $A\cap B=\{3\}$，应有以下两种情况：

$$m+2=3 \text{ 或者 } m^2+4=3,$$

解得 $m=1$.

【例 4】判断下列两个集合之间的关系：

（1）$A=\{(x, y)|\,x=y\}$，$B=\{(x, y)|\,x^2=y^2\}$.

（2）$C=\{x\,|\,x$ 是矩形$\}$，$D=\{x\,|\,x$ 是有一个角为直角的平行四边形$\}$.

解：（1）因为 $x=y\Rightarrow x^2=y^2$，反之不成立，所以 $A\subsetneqq B$.

（2）因为 x 是矩形$\Leftrightarrow x$ 是有一个角为直角的平行四边形，所以 $C=D$.

点评：两个集合的关系，通常可以通过观察集合元素的特征性质之间的关系来判断.

【例 5】已知集合 $A=\{x\,|-3<x<1\}$，$B=\{x\,|\,x>a\}$，且满足 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围.

解：（1）当 $a\geqslant 1$ 时，不符合题意.

（2）当$-3<a<1$ 时，$A\not\subseteq B$，不符合题意.

（3）当 $a\leqslant -3$ 时，$A\subseteq B$，符合题意.

所以 a 的取值范围是 $a\leqslant -3$.

点评：由两个集合的关系求字母的取值范围的问题，要对不等式中的所有界点进行讨论，分三种情况：界点的右边，界点之间，界点的左边.

【例 6】已知集合 A，B，按照下面的方式规定新的运算：若 $A=\{1, 2\}$，$B=\{3, 4\}$，则有

$A\times B=\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$，

$B\times A=\{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$.

试根据上述运算法则回答下列问题：

（1）$C=\{a\}$，$D=\{1, 2, 3\}$，求 $C\times D$.

（2）$E\times F=\{(1, 5), (2, 5)\}$，求集合 E，F.

（3）集合 M 中有 3 个元素，N 中有 4 个元素，试确定 $M\times N$ 中有几个元素.

解：（1）$C\times D=\{(a, 1), (a, 2), (a, 3)\}$.

（2）根据运算法则，集合 $E\times F$ 中的每一个元素都是由两个数构成的有序数组，其中第一个数来自集合 E，第二个数来自集合 F，因为 $E\times F=\{(1,5),(2,5)\}$，所以 $E=\{1,2\}$，$F=\{5\}$．

（3）从以上解题过程中可以看出，从集合 M 中取出 1 个元素，分别与集合 N 中的 4 个元素可构成集合 $M\times N$ 的 4 个元素，因为集合 M 中共有 3 个元素，所以，集合 $M\times N$ 中的元素个数为 $3\times4=12$（个）．

点评：①本题比较新颖，有益于开发智力，感兴趣的同学可仿照编写新题，与同学共享．

②第（3）小题亦可用计数原理解决：集合 $M\times N$ 中的元素都由两个“数”构成，前一个由集合 M 中取出，有 C_3^1 种取法；后一个由集合 N 中取出，有 C_4^1 种取法，由分步计数原理可知，$M\times N$ 中的所有元素可以有 $C_3^1\times C_4^1=12$ 种写法，即集合 $M\times N$ 中有 12 个元素．

习　题　一

1．选择题

（1）下列语句描述的对象能构成集合的是（　　）．

（A）图书馆内好书的全体　　（B）所有较聪明的同学

（C）所有不小于 2 的实数　　（D）著名歌手的全体

（2）若 $A=\{x\mid x<-1\}$，则下列关系正确的是（　　）．

（A）$\{0\}\subseteq A$　　（B）$\varnothing=A$　　（C）$\{-1\}\subsetneqq A$　　（D）$\varnothing\subseteq A$

（3）设集合 $A=\{x\mid x+2=0\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-4=0\}$，则 $A\cap B=$（　　）．

（A）$\{-2\}$　　（B）$\{2\}$　　（C）$\{-2,2\}$　　（D）$\varnothing$

（4）已知全集 $U=\{a,b,c,d\}$，集合 $M=\{a,c\}$，则 $\complement_U M$ 等于（　　）．

（A）$\{a,b\}$　　（B）$\{a,d\}$　　（C）$\{b,d\}$　　（D）$\{b,c\}$

（5）设集合 $M=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$，$N=\{x\mid x-k\leqslant 0\}$，若 $M\subseteq N$，则 k 的取值范围是（　　）．

（A）$k\leqslant2$　　（B）$k\geqslant-1$　　（C）$k>-1$　　（D）$k\geqslant2$

（6）已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2<x\leqslant3\}$，则集合 $A\cup B=$（　　）．

（A）$\{-1,0,1,2,3\}$　　（B）$\{0,1,2\}$

（C）$\{-1,0,1,2\}$　　（D）$\{1,2\}$

（7）满足 $\{1\}\subseteq A\subsetneqq\{1,2,3,4\}$ 的集合 A 有（　　）个．

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8

（8）下列命题为真命题的是（　　）．

（A）3 是 9 的约数或 5 是 8 的约数　　（B）$5>3$ 且 $2<1$

（C）$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2<0$　　（D）$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x+1>0$

（9）若集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,4\}$，则 $A\cap B$ 的子集个数为（　　）．

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）16

（10）已知全集 $U=\{x\mid x$ 是某班的学生$\}$，$A=\{x\mid x$ 是参加足球社团的学生$\}$，$B=\{x|x$ 是参加轮滑社团的学生$\}$，则“该班既参加足球社团又参加轮滑社团的学生的全体”可表示

为（　　）.

（A）$A\cap B$　　（B）$A\cup B$　　（C）$\complement_U A$　　（D）$\complement_U B$

（11）已知集合 $A=\{1,a\}$，$B=\{1,2,3\}$，则“$a=3$”是“$A\subseteq B$”的（　　）.

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（12）已知集合 $A=\{x\,||x|\leqslant 2\}$，$B=\{x\,|\,x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）.

（A）$(-\infty,2]$　　（B）$[1,2]$　　（C）$[-2,2]$　　（D）$[-2,1]$

2．填空题

（1）选择适当的符号($\in$，$\notin$，$=$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$)填空：

①$\frac{1}{2}$____$\mathbf{N}$；　　②0____$\mathbf{N}$；　　③$\varnothing$____$\{0\}$；

④$\{1\}$____$\{1,2,3\}$；　　⑤1____$\{1,2,3\}$；　　⑥$\{a,b,c\}$____$\{a,b\}$；

⑦a____$\{a\}$；　　⑧$\{a,b\}$____$\{b,a\}$；　　⑨$\varnothing$____$\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2=-1\}$.

（2）设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，$M=\{x\,|\,x=a+b,a\in A,b\in B\}$，则集合 M 中元素的个数为________.

（3）设 $U=\{0,1,2,3\}$，$A=\{x\in U\,|\,x^2+mx=0\}$，若 $\complement_U A=\{1,2\}$，则实数 $m=$______.

（4）设集合 $M=\{(x,y)\,|\,y^2=x\}$，集合 $N=\{(x,y)\,|\,x-y=0\}$，则 $M\cap N=$________.

3．解答题

（1）写出下列命题的非命题.

①p：$5+10\times3=20$；　　②q：全班同学都是山东人；

③r：$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2=1$；　　④s：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x+2=3$.

（2）已知集合 $A=\{x\,|\,ax^2+2x+1=0,\ a\in\mathbf{R}\}$，

①若 A 是空集，求 a 的取值范围；

②若 A 中只有 1 个元素，求 a 的值；

③若 A 中有 2 个元素，求 a 的取值范围.

（3）设全集 $U=\{3,4,a^2+2a-3\}$，集合 $A=\{a+1,2a\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 的值.

测 试 题 一

（时间为 45 分钟，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 15 个小题，每小题 2 分，共 30 分）

1．下列表示集合的方法中，正确的是（　　）．

（A）不等式 $x^2+1>0$ 的解集是 $\{\mathbf{R}\}$

（B）方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解集是 $\{\varnothing\}$

（C）集合 $A=\{x\mid x^2=x\}$ 用列举法可表示为 $\{0，1\}$

（D）关于 x，y 的方程组 $\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\end{cases}$ 的解集是 $\{2，-1\}$

2．设集合 $A=\{4，a^2-3a\}$，则关于 a 的取值下列说法正确的是（　　）．

（A）$a\neq4$ 或 $a\neq-1$　　（B）$a\neq4$ 且 $a\neq-1$

（C）$a\neq-4$ 或 $a\neq1$　　（D）$a\neq-4$ 且 $a\neq1$

3．给出下列关系：①$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$；②$0\notin\mathbf{N}$；③$\varnothing\subsetneqq\{x\mid |x|<0\}$；④$\{a\}\subseteq\{a\}$．其中，正确的个数是（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4．若非空集合 P 和 Q 有下列关系，$P\subseteq Q$，$Q\not\subseteq P$，$P\cap Q=M$，且 M 为非空集，则用图形表示集合 P 与 Q 的关系，下列选项正确的是（　　）．

（A）　　（B）　　（C）　　（D）

5．设集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2<x<4\}$，$B=\{x\mid 0<x<3\}$，则 $A\cap B=$（　　）．

（A）$\{1，2\}$　　（B）$\{0，1，2，3\}$

（C）$\{1，2，3\}$　　（D）$\{-1，0，1，2，3\}$

6．已知集合 M，N，若 $M\cap N=M$，则下列关系正确的是（　　）．

（A）$N\subsetneqq M$　　（B）$N\subseteq M$　　（C）$M\subsetneqq N$　　（D）$M\subseteq N$

7．集合 $M=\{(x，y)\mid xy\geqslant0\}$ 是（　　）．

（A）第一象限内的点的集合　　（B）第三象限内的点的集合

（C）在第一、三象限内的点的集合　　（D）不在第二、四象限内的点的集合

8．$a=0$ 是 $ab=0$ 的（　　）．

（A）充要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分不必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9．命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2\geqslant0$”的非命题为（　　）．

（A）对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2<0$　　（B）不存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2<0$

（C）存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2\geqslant0$　　（D）存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2<0$

10．在一次跳伞训练中，甲、乙两位学员各跳一次，设命题 p 是“甲学员降落在指定范围”，q 是“乙学员降落在指定范围”，则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为（　　）．

（A）$p\wedge q$　（B）$\neg p\wedge\neg q$　（C）$\neg(p\vee q)$　（D）$\neg p\vee\neg q$

11．下列命题为假命题的是（　　）．

（A）$x^2-4=0$ 是 $x-2=0$ 的充分条件　（B）$a=b$ 是 $a^3=b^3$ 的充要条件

（C）$\sin\alpha=\sin\beta$ 是 $\alpha=\beta$ 的必要条件　（D）$x<5$ 是 $x<3$ 的必要条件

12．设命题 p：如果 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，那么 $\alpha=30°$；命题 q：存在实数 x，使得 $x^2\leqslant 0$，则下列命题中为假命题的是（　　）．

（A）$p\vee q$　（B）$\neg p\wedge\neg q$　（C）$\neg p\wedge q$　（D）$\neg p\vee\neg q$

13．设点 $P(x，y)$，则“$x=2$ 且 $y=-1$”是“点 P 在直线 l：$x+y-1=0$ 上”的（　　）．

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

14．对于命题 p，q，若 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题，则（　　）．

（A）p，q 都是真命题　（B）p，q 都是假命题

（C）p，q 一个是真命题一个是假命题　（D）无法判断

15．设集合 $A=\{x\mid x\in p\}$，$B=\{x\mid x\in q\}$，若 $A=B$，则 p 是 q 的（　　）．

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

16. 集合 U 是全集，若集合 $A=\{1，3，5，7，9\}$，$\complement_U A=\{2，4，6，8\}$，$\complement_U B=\{1，4，6，8，9\}$，则集合 $B=$______．

17. 定义集合 $A*B=\{x\mid x\in A 且 x\notin B\}$，若 $A=\{1，3，5，7，9\}$，$B=\{2，3，5\}$，则 $A*B=$______．

18．命题 p: $3\geqslant 2$，则 $\neg p$ 是______．

19．如果集合 $A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x>a\}$，且 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围是______．

20．“$a+c=2b$”是“a，b，c”成等差数列的______条件．

三、解答题（本大题共 4 个小题，共 50 分．解答应写出推理、演算步骤）

21．（15 分）若集合 $A=\{0，1，2，x\}$，$B=\{1，x^2\}$，$A\cup B=A$，求满足条件的实数 x 的值．

22.（10 分）设集合 $A=\{x\,|\,x^2+2(m-1)x+m^2=0\}$，若 $A=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

23.（10 分）已知集合 $P=\{x\,|\,ax^2+4x+4=0\}$ 中只有一个元素，求实数 a 的值.

24.（15 分）设集合 $M=\{x\,|\,-1<x<2\}$，$N=\{x\,|\,x\leqslant a\}$，若 $M\cap N\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

一个有信念者所开发出的力量，大于 99 个只有兴趣者。

第二章
方程与不等式

【复习要求】

方程与不等式是基本的数学知识，在解决实际问题中经常会用到．其中贯穿的配方法、作差比较法都是重要的数学方法，可以灵活运用这些方法解决有关问题．对本部分内容的复习要求如下：

1．掌握配方法，会用配方法解决有关问题．

2．会解一元二次方程．

3．理解不等式的性质，会用比较法证明简单不等式．

4．会解一元一次不等式（组），会用区间表示不等式的解集．

5．会解形如 $|ax+b|\geqslant c$ 或 $|ax+b|<c$（$c>0$）的含有绝对值的不等式．

6．会解一元二次不等式，会用区间表示不等式的解集．

7．能利用不等式的知识解决实际问题．

【知识框图】

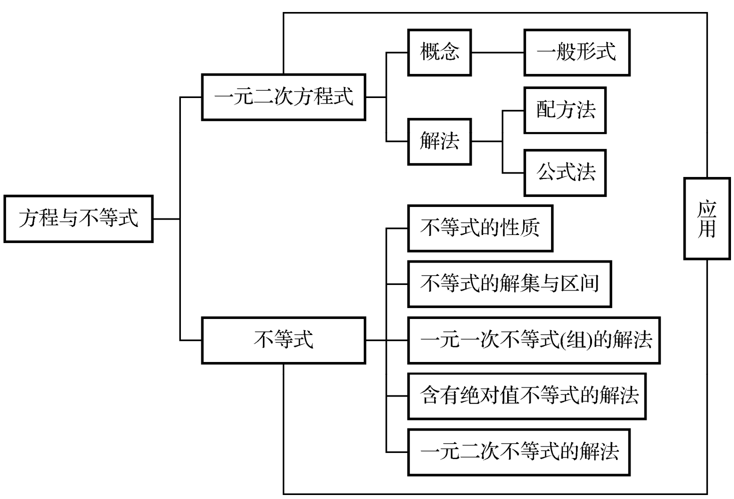


图 2-1

【知识要点】

1．二次三项式 ax^2+bx+c 的配方步骤：

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c, \cdots\cdots\text{提取二次项的系数 } a$$

$$=a\left\{\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]\right\}+c, \cdots\cdots\text{配方}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}. \cdots\cdots\text{变形整理}$$

注意：判断配方后的结果是否正确，可以逆推检验．

2．一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$

（1）解法一：配方法

用配方法解一元二次方程的方法步骤：

$ax^2+bx+c=0$，

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$，……………………变二次项系数为 1（方程两边同除以 a）

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，……………………移项（把常数项移到等号右端）

$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$，……配方（方程两边同加一次项系数一半的平方）

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，……………整理（方程的左边是一个完全平方式）

①当 $b^2-4ac>0$ 时，$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，……………开平方

即 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

②当 $b^2-4ac=0$ 时，$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$．

③当 $b^2-4ac<0$ 时，一元二次方程无解．

说明：用配方法解一元二次方程的步骤可概括为“一变，二移，三配，四整，五开”．

解法二：公式法

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$　$(a\neq 0)$ 的求根公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad (b^2-4ac\geqslant 0)$$

注意：这个公式的推导是用配方法解一元二次方程得到的．

（2）若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$　$(a\neq 0)$根的判别式为：$\Delta=b^2-4ac$，则

$\Delta>0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程有两个不相等的实数根；

$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程有两个相等的实数根；

$\Delta<0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程没有实数根.

（3）一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 根与系数的关系

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的两个根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

3．不等式的性质与证明

（1）实数大小的基本性质

设 a，b 是两个任意实数，它们具有如下基本性质：

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b;\quad a-b=0 \Leftrightarrow a=b;\quad a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

（2）不等式的性质

①对称性　　$a>b \Leftrightarrow b<a$；

②传递性　　$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$；

③加法法则　$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；

④移项法则　$a+b>c \Leftrightarrow a>c-b$；

⑤乘法法则　$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$；$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$.

提示：加法法则和乘法法则是不等式的基本性质，其他的可视为不等式性质的推论，不等式的性质是不等式变形的依据.

（3）不等式的证明

作差比较法是证明不等式的常用方法，其一般步骤为：

作差→整理变形→判断符号→得出结论.

4．不等式的解法

（1）一元一次不等式（组）的解法

①关于 x 的一元一次不等式 $ax>b\quad(a\neq0)$.

当 $a>0$ 时，解集是 $\left\{x\middle|x>\dfrac{b}{a}\right\}$；当 $a<0$ 时，解集是 $\left\{x\middle|x<\dfrac{b}{a}\right\}$.

②一元一次不等式组的解集就是该不等式组中每个不等式解集的交集.

（2）含绝对值不等式的解法

①$|ax+b|>c\,(c>0) \Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$；

②$|ax+b|<c\,(c>0) \Leftrightarrow -c<ax+b<c$.

提示：解 $|ax+b|\geqslant c$ 时，在等价变形时不要丢掉等号.

（3）一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$（$a>0$）的解法

解法一：配方法（此处只给出前者的解法）

将 $ax^2+bx+c>0$（$a>0$）配方，化为 $(x-n)^2>m$ 的形式.

①当 $m>0$ 时，开方得 $|x-n|>\sqrt{m}$，然后根据含绝对值不等式的解法求出解集；

②当 $m=0$ 或 $m<0$ 时，解集如表 2-1 所示.

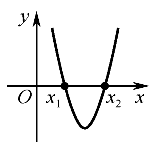
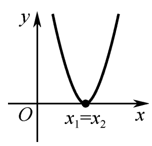
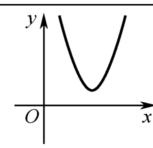
表 2-1　一元二次不等式的解集（m=0 或 m<0 时）

m=0		m<0	
$(x-n)^2>0$	$(-\infty, n)\cup(n, +\infty)$	$(x-n)^2>m$	**R**
$(x-n)^2<0$	$\varnothing$	$(x-n)^2<m$	$\varnothing$

解法二：图像法

根据二次函数的图像及一元二次方程的根，写出相应不等式的解集，如表 2-2 所示：

表 2-2　图像法解一元二次不等式

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a>0）的根	x_1，x_2（$x_1<x_2$）	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图像			
解集　$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$	$\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$	**R**
解集　$ax^2+bx+c<0$	(x_1, x_2)	$\varnothing$	$\varnothing$

注：若二次项系数小于零，通常在已知不等式的两端同时乘以“−1”，使二次项系数大于零，再求解．

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）已知 $a>b>0$，下列选项中正确的是（　　）．

（A）$a+b>2a$　　　　（B）$a+c<b+c$

（C）$|a|<|b|$　　　　（D）$a^2>b^2$

分析：$a+b<a+a=2a$，选项（A）不正确；$a>b\Rightarrow a+c>b+c$，选项（B）不正确；$a>b>0\Rightarrow|a|>|b|$，选项（C）不正确．因为 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0$，所以 $a^2>b^2$，选项（D）正确．

点评：此类问题可利用不等式的基本性质进行判断，也可以取特殊值进行验证．

（2）集合 $A=\{x|0<x\leqslant2$ 且 $x\neq1\}$用区间可表示为（　　）．

（A）$(0, 1)\cup(1, 2)$　　　　（B）$[0, 1)\cup[1, 2]$

（C）$(0, 1]\cup(1, 2]$　　　　（D）$(0, 1)\cup(1, 2]$

分析：因为 $1\notin A$，排除选项（B）和（C），又因为 $2\in A$，故选（D）．

（3）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-|x|}}$ 的定义域是（　　）．

（A）$(-2，2)$　　（B）$(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$

（C）$[-2，2]$　　（D）$(-\infty，-2]\cup[2，+\infty)$

分析：要使式子$\dfrac{1}{\sqrt{2-|x|}}$有意义，须使$2-|x|>0$，即$|x|<2$，解得$-2<x<2$．用区间表示为$(-2，2)$，故选（A）．

（4）方程 $ax^2+bx+c=0$　（$a>0$）有两实数根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是（　　）．

（A）$\mathbf{R}$　　（B）$(x_1，x_2)$

（C）$(-\infty，x_1)\cup(x_2，+\infty)$　　（D）$\varnothing$

分析：由题意可知，二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）的图像与 x 轴有两个交点（x_1，0），（x_2，0），如表 2-2 所示，由图像可知 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是$(-\infty，x_1)\cup(x_2，+\infty)$，故选（C）．

【例 2】已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2\geqslant ab$．

证明：因为 a^2+b^2-ab

$=a^2-ab+b^2$

$=a^2-ab+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+b^2$

$=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$，

又因为 a，$b\in\mathbf{R}$，

所以$\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2\geqslant0$，$\dfrac{3}{4}b^2\geqslant0$，

所以 $a^2+b^2-ab\geqslant0$，

所以 $a^2+b^2\geqslant ab$．

点评：作差得到的结果常常采用配方法判断其与 0 的大小关系．

【例 3】用配方法解不等式：$-x^2+3x+10<0$．

解：原不等式等价于

$$x^2-3x-10>0,$$

$$x^2-3x>10,$$

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2>10+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2>\frac{49}{4},$$

$$\left|x-\frac{3}{2}\right|>\frac{7}{2},$$

所以

$$x-\frac{3}{2}<-\frac{7}{2}\quad 或\quad x-\frac{3}{2}>\frac{7}{2},$$

即

$$x<-2 \quad 或 \quad x>5,$$

所以原不等式的解集为

$$\{x|x<-2 或 x>5\}.$$

【例 4】计划用 20 m 长的栅栏，围成一个矩形的院子 $ABCD$，如图 2-2 所示，院子的一侧 CD 是房屋的墙，足够长，不必再用栅栏去围，如果要使围成的矩形院子面积不小于 18 m^2，请问与墙正对的栅栏 AB 长度的取值范围应是多少？

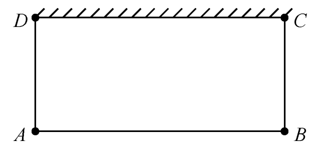


图 2-2

解：设 AB 的长度为 x m，由题意得

$x\cdot\dfrac{20-x}{2}\geqslant 18$，即 $x^2-20x+36\leqslant 0$，

解得 $2\leqslant x\leqslant 18$.

所以 AB 长度的取值范围应是 $[2，18]$.

【例 5】若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right\}$，求实数 a，b 的值.

分析：由原不等式的解集知，$-\dfrac{1}{2}$ 与 $\dfrac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根，可依据韦达定理求得 a，b 的值.

解：由题意得 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{b}{a}\\ -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{a}\end{cases}$，解得　$a=-12$，$b=-2$.

点评：要理解一元二次不等式解集与相应一元二次方程根的关系.

【例 6】解不等式 $5\leqslant 7-5x<22$.

分析：原不等式等价于不等式组 $\begin{cases}7-5x\geqslant 5\\ 7-5x<22\end{cases}$，此不等式组的解集就是原不等式的解集.

解法一：原不等式可化为

$$\begin{cases}7-5x\geqslant 5 & ①\\ 7-5x<22 & ②\end{cases}$$

解不等式①得　$x\leqslant\dfrac{2}{5}$；解不等式②得　$x>-3$.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-3<x\leqslant\dfrac{2}{5}\right\}$.

解法二：原不等式等价于 $-2\leqslant -5x<15$，化简得 $-3<x\leqslant\dfrac{2}{5}$.

所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-3<x\leqslant\dfrac{2}{5}\right\}$.

点评：在不等式的两边都乘以（或除以）同一个负数时，一定要改变不等号的方向.

【例 7】已知关于 x 的一元二次不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集是 $\mathbf{R}$，求实数 a

的取值范围.

分析：利用二次函数、一元二次方程与一元二次不等式的关系，讨论不等式恒成立的条件.

解：因为关于 x 的一元二次不等式 $(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集是 $\mathbf{R}$，

所以二次函数 $y=(a^2-1)x^2-(a-1)x-1$ 的图像开口向下且与 x 轴没有交点，则有

$$\begin{cases}a^2-1<0\\(a-1)^2+4(a^2-1)<0\end{cases}，解得\begin{cases}-1<a<1\\-\dfrac{3}{5}<a<1\end{cases}.$$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\dfrac{3}{5},1\right)$.

点评：一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$；$ax^2+bx+c<0$ 恒成立的条件是 $\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$.

【例 8】实数 m 在什么范围时，关于 x 的二次方程 $x^2+2mx+m+2=0$ 有两个不相等的负根？

解：设 x_1 与 x_2 为方程的两个负根，且 $x_1\neq x_2$，由题意得

$$\begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2<0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}，即\begin{cases}4m^2-4m-8>0\\-2m<0\\m+2>0\end{cases}，解得\begin{cases}m<-1\ 或\ m>2\\m>0\\m>-2\end{cases}.$$

所以 m 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

点评：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 两实根的符号与系数 a，b，c 的关系，如表 2-3 所示.

表 2-3　一元二次方程根的符号与其系数的关系

根的情况	两个正根	两个负根	一个正根、一个负根	一个零根
满足的条件	$\begin{cases}\Delta\geqslant0\\x_1+x_2>0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta\geqslant0\\x_1+x_2<0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases}$	$\Delta>0$ $x_1\cdot x_2<0$	$c=0$

习　题　二

1．选择题

（1）不等式 $-x+3<0$ 的解集是（　　）.

（A）$(-\infty，3)$　　（B）$(-\infty，3]$　　（C）$(3，+\infty)$　　（D）$[3，+\infty)$

（2）对任意实数 a，b，下列关系正确的是（　　）.

（A）若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　　（B）若$|a|>b$，则 $a^2>b^2$

（C）若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$　　（D）若 $a\neq|b|$，则 $a^2\neq b^2$

（3）实数 a，b 满足 $a<b<0$，那么（　　）.

（A）$a-b>0$　　（B）$ac<bc$

（C）$a^2<b^2$　　（D）$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

（4）不等式组$\begin{cases}2x+1>0\\1-3x>0\end{cases}$的解集是（　　）.

（A）$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$　　（B）$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$

（C）$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$　　（D）$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}\right)$

（5）方程 $x^2+2x-3=0$ 的根是（　　）.

（A）-1　　（B）3　　（C）1，-3　　（D）（-1，3）

（6）关于 x 的方程 $x^2+mx-2m^2=0$ 的一个根为 1，则 m 的值为（　　）.

（A）1　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）1 或$\frac{1}{2}$　　（D）1 或$-\frac{1}{2}$

（7）已知集合 $A=(-\infty,\ 2]$，$B=(-1,\ 3)$，则 $A\cap B$ 等于（　　）.

（A）$(-1,\ 2)$　　（B）$[-1,\ 2]$　　（C）$(-1,\ 2]$　　（D）　$[-1,\ 2)$

（8）已知一个直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $2x^2-8x+7=0$ 的两个根，则这个直角三角形的斜边长是（　　）.

（A）$\sqrt{3}$　　（B）3　　（C）6　　（D）9

（9）一元二次方程 $x^2-mx+4=0$ 有实数根，则实数 m 的取值范围是（　　）.

（A）$(-4,\ 4)$　　（B）$[-4,\ 4]$

（C）$(-\infty,\ -4)\cup(4,\ +\infty)$　　（D）$(-\infty,\ -4]\cup[4,\ +\infty)$

（10）已知点 $P(9-m,\ m+2)$ 在第一象限，则 m 的取值范围是（　　）.

（A）$-2<m<9$　　（B）$-9<m<2$　　（C）$m>-2$　　（D）$m<9$

（11）不等式 $|x-a|\leqslant b$ 的解集是 $[-3,\ 9]$，则 a，b 的值为（　　）.

（A）6，3　　（B）-6，-3　　（C）3，6　　（D）-3，-6

（12）不等式 $|2x-5|>1$ 的解集是（　　）.

（A）$(-\infty,\ 2)$　　（B）$(2,\ 3)$　　（C）$(3,\ +\infty)$　　（D）$(-\infty,\ 2)\cup(3,\ +\infty)$

（13）不等式 $x<x^2$ 的解集是（　　）.

（A）$(0,\ 1)$　　（B）$[1,\ +\infty)$

（C）$[0,\ 1]$　　（D）$(-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$

（14）若实数 a，b 满足 $a^2+b^2+6a-8b+25=0$，则 $a+b$ 的值等于（　　）.

（A）-1　　（B）-2　　（C）1　　（D）2

（15）不等式 $4(2x^2+2x+1)>x(4-x)$的解集是（　　）.

（A）$\varnothing$　　　　（B）**R**

（C）$\{x \mid x \neq 2\}$　　　　（D）$\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$

（16）不等式$-x^2+bx+c>0$ 的解集是$\{x|2<x<3\}$，则 b 和 c 的值分别是（　　）.

（A）5，6　　（B）5，−6　　（C）−5，6　　（D）−5，−6

（17）已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a<0$）的两个根分别为−1 和 3，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为（　　）.

（A）$\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$　　　　（B）$\{x|-1<x<3\}$

（C）$\{x|-3<x<1\}$　　　　（D）$\{x|x<-3$ 或 $x>1\}$

（18）二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 **R** 的充要条件是（　　）.

（A）$a>0$，$\Delta>0$　　　　（B）$a>0$，$\Delta<0$

（C）$a<0$，$\Delta>0$　　　　（D）$a<0$，$\Delta<0$

（19）已知方程 $mx^2+(2m+1)x+m=0$ 有实根，则 m 的取值范围是（　　）.

（A）$m>-\dfrac{1}{4}$ 且 $m\neq0$　　　　（B）$m\geqslant-\dfrac{1}{4}$ 且 $m\neq0$

（C）$m\leqslant-\dfrac{1}{4}$ 且 $m\neq0$　　　　（D）$m\geqslant-\dfrac{1}{4}$

（20）某工人制作机器零件，若每天比原计划多做 1 件，那么 8 天所做的零件超过 100 件，若每天比原计划少做 1 件，那么 8 天所做的零件不足 90 件，该工人原计划制作零件（　　）.

（A）11 件　　（B）12 件　　（C）13 件　　（D）14 件

2．填空题

（1）不等式 $2(x+1)+\dfrac{x-2}{3}>\dfrac{7x}{2}-1$ 的解集是__________.

（2）三角形的两边长分别为 3 和 6，第三边是方程 $x^2-6x+8=0$ 的解，则这个三角形的周长是______.

（3）不等式$|8-3x|>0$ 的解集是______.

（4）已知不等式 $ax^2-x+b<0$ 的解集是$\{x|-2<x<3\}$，则 a=_____，b=______.

（5）在 **R** 上定义运算“$\otimes$”，已知 $a\otimes b=ab+2a+b$，则满足不等式 $x\otimes(x-2)<0$ 的 x 取值范围是______.

3．设 $x\in$**R**，$f(x)=(x^2+1)^2$，$g(x)=x^4+x^2+x$，比较 $f(x)$与 $g(x)$的大小.

4．设集合 $A=\{x|x^2-4x-5<0\}$，集合 $B=\{x||x-1|>1\}$，求 $A\cap B$.

5．设关于 x 的方程 $x^2+2(k-1)x+2k+6=0$ 有两个正实根，求实数 k 的取值范围．

6．某厂生产新产品需一种新零件，可外购，也可自产．外购，每个价格为 1.10 元；自产，新产品的固定成本将增加 800 元，并且生产一个这种零件的材料费和劳力费等支出合计 0.60 元．该厂应自产还是外购这种零件．

7．当 $a\neq0$ 时，解不等式：$ax+1>-2$．

8．已知 $A=\{x|x-2<0\}$，$B=\{x|x^2-4x-5<0\}$，（1）求 $A\cap B$．（2）若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $A\cap B$，求 a，b 的值．

测 试 题 二

（时间为 90 分钟，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 15 个小题，每小题 3 分，共 45 分）

1．如果 $a>b$，那么下列结论不正确的是（　　）．

（A）$a+c>b+c$　　（B）$a-c>b-c$

（C）$ac^2>bc^2$　　（D）$b<a$

2．已知 $a<b<0$，则下列各式不正确的是（　　）．

（A）$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　（B）$\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$

（C）$a^2>b^2$　　（D）$|a|>|b|$

3．若 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，则下列关系正确的是（　　）．

（A）$-b>-a$　　（B）$a^2>b^2$　　（C）$\sqrt{a}>\sqrt{b}$　　（D）$|a|>|b|$

4．设 $m=a^2+a-2$，$n=2a^2-a-1$，其中 $a\in\mathbf{R}$，则（　　）．

（A）$m>n$　　（B）$m\geqslant n$　　（C）$m<n$　　（D）$m\leqslant n$

5．已知代数式 a^2+4a-2 的值是 3，则代数式 $a-1$ 的值是（　　）.

（A）-6　　（B）0　　（C）-6 或 0　　（D）2

6．如果 $ax^2+bx+c=0$ 中，$a<0$，判别式 $\Delta>0$，它的两根分别是 x_1，x_2，且满足 $x_1<x_2$，则不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为（　　）.

（A）$(x_1，x_2)$　　（B）$(-\infty，x_1)\cup(x_2，+\infty)$

（C）$\mathbf{R}$　　（D）$\varnothing$

7．若不等式组 $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{3}>1\\ x>a\end{cases}$ 的解为 $x>2$，则 a 的取值范围是（　　）.

（A）$a<2$　　（B）$a\leqslant 2$　　（C）$a>2$　　（D）$a\geqslant 2$

8．设集合 $A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\{x||x-1|>1\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）.

（A）$(-1，3)$　　（B）$(-\infty，0)\cup(3，+\infty)$

（C）$(-1，0)$　　（D）$(-1，0)\cup(2，3)$

9．不等式 $|3-2x|+1<0$ 的解集是（　　）.

（A）$\mathbf{R}$　　（B）$(1，2)$

（C）$(-\infty，-3)\cup(1，+\infty)$　　（D）$\varnothing$

10．下列命题为真命题的是（　　）.

（A）$x^2>x\Rightarrow x>0$　　（B）$x^2>0\Rightarrow x>0$

（C）$x<0\Rightarrow x^2>x$　　（D）$x<1\Rightarrow x^2<x$

11．一元二次不等式 $x^2+2x-15>0$ 的解集是（　　）.

（A）$(-5，3)$　　（B）$(-\infty，-5)\cup(3，+\infty)$

（C）$(-3，5)$　　（D）$(-\infty，-3)\cup(5，+\infty)$

12．若不等式 $2x^2-bx+a<0$ 的解集为 $\{x|1<x<5\}$，则 $a=$（　　）.

（A）5　　（B）6　　（C）10　　（D）12

13．不等式 $(x+2)(1-x)>0$ 的解集是（　　）.

（A）$\{x|x<-2或x>1\}$　　（B）$\{x|x<-1或x>2\}$

（C）$\{x|-2<x<1\}$　　（D）$\{x|-1<x<2\}$

14．已知 $a\in\mathbf{R}$，则下列各式中正确的是（　　）.

（A）$|-a|=a$　　（B）$\sqrt{(-a)^2}=-|a|$

（C）$\sqrt{a^2}=a$　　（D）$|2-a|=|a-2|$

15．若不等式 $x^2+mx+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则 m 的取值范围是（　　）.

（A）$\mathbf{R}$　　（B）$(-2，2)$

（C）$(-\infty，2)\cup(2，\infty)$　　（D）$[-2，2]$

二、填空题（本题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

16．已知集合 $A=\{x|mx^2+2x-1=0\}$ 为空集，则实数 m 的取值范围是________.

17．当 $a<0$ 时，不等式 $-ax>-b$ 的解集是____________.

18．等腰△ABC 中，底 $BC=8$，AB、BC 的长是关于 x 的方程 $x^2-10x+m=0$ 的两根，

则 m 的值是_____.

19．已知实数 a，b 满足 $a^2+b^2-2(2a-b)+5=0$，则 $a=$________，$b=$________.

20．已知二次函数 $y=x^2-x-b$ 的图像与 x 轴至少有一个交点，则实数 b 的取值范围是________.

三、解答题（本题共 5 个小题，共 35 分，解答应写出推理、演算步骤）

21．（7 分）如果 x_1，x_2 是方程 $x^2+4x-1=0$ 的两根，求：（1）$x_1^2+x_2^2$．（2）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$．

22．（7 分）当 a 为何值时，关于 x 的不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 的解为一切实数？

23．（7 分）若一元二次不等式 $ax^2-3x+2\leqslant 0$ 的解集是 $\{x|1\leqslant x\leqslant b\}$，（1）求 a，b 的值．（2）求不等式 $bx^2-3x+a>0$ 的解集.

24．（7 分）已知命题 p：方程 $ax^2+(a+2)x-\dfrac{1}{4}=0$ 无解，命题 q：函数 $y=2x^2-8x+a$ 的图像与 x 轴没有交点；如果 $p\vee q$ 为假命题，求 a 的取值范围.

25．（7 分）某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件赢利 40 元，为了扩大销售增加赢利、尽快减少库存，商场决定采取适当的降价措施. 经调查发现，如果每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 2 件．若商场平均每天至少赢利 1200 元，则每件衬衫降价的范围是多少？（注：降价为整数）

有志者自有千计万计，无志者只感千难万难。

第三章
函　　数

【复习要求】

函数是数学学科一个非常重要的知识点，对它的学习贯穿整个高中阶段．在函数学习过程中，贯穿着许多重要的数学思想方法：换元法、数形结合法、待定系数法等，可以灵活运用这些思想方法解决有关问题．不等式、数列、直线、圆锥曲线都是函数思想的应用．对本部分的复习要求如下：

1．理解函数的概念及其表示法，会求一些常见函数的定义域．

2．理解函数符号 $f(x)$ 的含义，会由 $f(x)$ 的表达式求出 $f(ax+b)$ 的表达式．

3．理解函数的单调性、奇偶性的定义，掌握增函数、减函数、奇函数、偶函数的图像特征．

4．理解分段函数的概念．

5．理解二次函数的概念，掌握二次函数的图像和性质．

6．会求二次函数的解析式，会求二次函数的最值．

7．能运用函数知识解决简单的实际问题．

8．掌握实数指数幂的运算法则，能利用计算器求实数指数幂的值．

9．理解对数的性质和运算法则，能利用计算器求对数值．

10．理解指数函数、对数函数的概念，掌握其图像和性质．

11．能运用指数函数、对数函数的知识解决有关问题．

【知识框图】

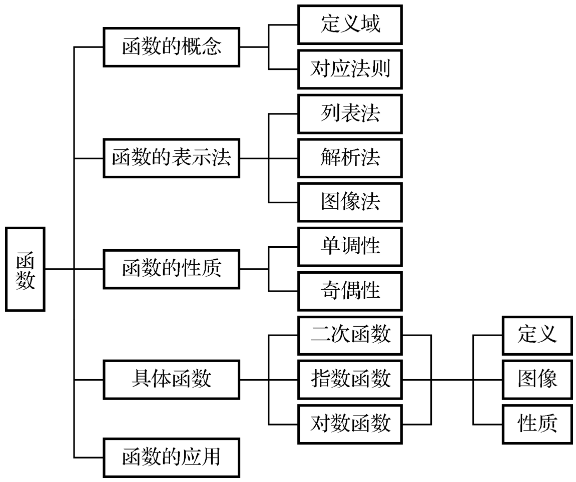


图 3-1

【知识要点】

1．函数的概念

（1）函数的概念：设集合 A 是一个非空实数集，按照某种确定的对应法则 f，对 A 中任意的实数 x 都有唯一确定的实数值 y 与它相对应，则称这种对应法则为集合 A 上的一个函数，记作 $y=f(x)$.

（2）函数的定义域是指使函数有意义的自变量的取值集合，一般用集合的列举法、性质描述法或区间法表示.

2．函数的表示方法：解析法，列表法，图像法.

3．函数的单调性

（1）概念：如果对于函数 $y=f(x)$给定区间上的任意两个不相等的变量 x_1，x_2，设 $\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$，当 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ 时，则 $y=f(x)$在这个区间上是增函数；反之，当 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ 时，则 $y=f(x)$在这个区间上是减函数.

如果一个函数在某个区间上是增函数或减函数，就说这个函数在这个区间上具有单调性，这个区间叫作函数的单调区间.

（2）图像特征：增函数的图像自左而右逐渐上升；减函数的图像自左而右逐渐下降.

4．函数的奇偶性

（1）概念：如果函数 $y=f(x)$对于定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则这个函数叫作奇函数；若对于定义域内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则这个函数叫作偶函数.

（2）图像特征：奇函数$\Leftrightarrow$函数的图像关于坐标原点对称；

偶函数$\Leftrightarrow$函数的图像关于 y 轴对称.

注意：①函数 $y=f(x)$与函数 $y=-f(x)$的图像关于 x 轴对称；

②函数 $y=f(x)$与函数 $y=f(-x)$的图像关于 y 轴对称；

③函数 $y=f(x)$与函数 $y=-f(-x)$的图像关于原点对称．

提示：判断一个函数 $f(x)$的奇偶性，首先考虑其定义域是否关于原点对称．

①若不对称，则 $f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数．

②若对称，则

当 $f(-x)=f(x)$时，$f(x)$为偶函数；

当 $f(-x)=-f(x)$时，$f(x)$为奇函数；

当 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$时，$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数；

当 $f(-x)=f(x)$且 $f(-x)=-f(x)$时，$f(x)$既是奇函数又是偶函数．

5．二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的图像和性质

（1）图像：二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的图像是一条抛物线．它的对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标$\left(-\dfrac{b}{2a}，\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$．当 $a>0$ 时，抛物线开口向上；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下．

（2）单调性

①当 $a>0$ 时，在区间$\left(-\infty，-\dfrac{b}{2a}\right]$上是减函数，在区间$\left[-\dfrac{b}{2a}，+\infty\right)$上是增函数；

②当 $a<0$ 时，在区间$\left(-\infty，-\dfrac{b}{2a}\right]$上是增函数，在区间$\left[-\dfrac{b}{2a}，+\infty\right)$上是减函数．

（3）最大值与最小值

①当 $a>0$，$x=-\dfrac{b}{2a}$时，函数有最小值 $y_{\min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

②当 $a<0$，$x=-\dfrac{b}{2a}$时，函数有最大值 $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$．

6．指数与指数函数的图像和性质如表 3-1 所示，对数与对数函数的图像和性质如表 3-2 所示．

表 3-1　指数与指数函数的图像和性质

指数	有理指数幂的概念	零指数幂：$a^0=1\ (a\neq 0)$
		负整数指数幂：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}\ (n\in \mathbf{N}_+)\ (a\neq 0)$
		分数指数幂： $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$；$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$　$(m,n\in \mathbf{N}_+,\ m,n$ 互质$,a>0)$
	幂的运算	$a^m\bullet a^n=a^{m+n}$；$a^m\div a^n=a^{m-n}$；$(a^m)^n=a^{mn}$；$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ $(ab)^n=a^n\bullet b^n$　$(a>0，b>0，m，n\in \mathbf{R})$
	根式的性质	1．$(\sqrt[n]{a})^n=a$（$a>0$，$n\in \mathbf{N}$ 且 $n>1$） 2．当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$； 当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert=\begin{cases} a\ (a\geqslant 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$

（续）

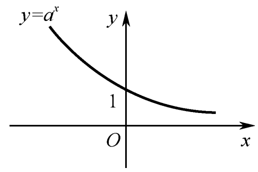
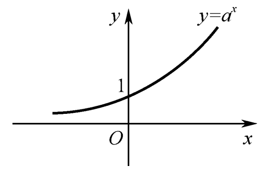
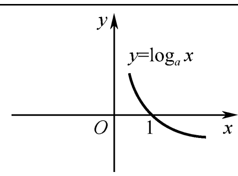
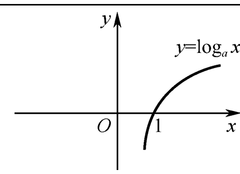
指数函数	定义	一般地，函数 $y=a^x$ $(a>0且a\neq1,\ x\in\mathbf{R})$ 叫作指数函数	
	图像	$0<a<1$	$a>1$
			
	性质	定义域：**R**	
		值域：(0，+∞)	
		图像都经过点（0，1），即当 x=0 时，y=1	
		$0<a<1$ 时，函数在 **R** 上是减函数，且当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$. $a>1$ 时，函数在 **R** 上是增函数，且当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$	

表 3-2　对数与对数函数的图像和性质

对数	定义	若 $a^b=N(a>0且a\neq1)$，则 b 叫作以 a 为底 N 的对数，即 $b=\log_a N$	
	性质	①负数和零无对数；②1 的对数为零，即 $\log_a 1=0$；③底的对数为 1，即 $\log_a a=1$	
	恒等式	$a^{\log_a N}=N$ $(N>0)$	
	对数运算	若 a>0 且 $a\neq1$，$M>0,N>0$，则 ① $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；② $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；③ $\log_a M^n=n\log_a M$	
	换底公式	$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(b>0,c>0且c\neq1)$	
对数函数	图像	$0<a<1$	$a>1$
			
	性质	定义域：(0，+∞)	
		值域：**R**	
		图像都经过点(1，0)，即 x=1 时，y=0	
		$0<a<1$ 时，函数在（0，+∞)上是减函数，且当 $x>1$ 时，$y<0$；当 $0<x<1$ 时，$y>0$. $a>1$ 时，函数在（0，+∞)上是增函数，且当 $x>1$ 时，$y>0$；当 $0<x<1$ 时，$y<0$	

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）下列四组函数中，表示相同函数的是（　　）.

（A）$y=1$ 与 $y=x^0$　　　（B）$y=2\lg x$ 与 $y=\lg x^2$

（C）$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$　　　（D）$y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$

分析：两个函数是同一函数，要求它们的定义域和对应法则都相同．其中只要有一项不

同，两个函数就不是同一函数.

在（A）中，由于函数 $y=1$ 定义域为 $\mathbf{R}$，函数 $y=x^0$ 的定义域为 $\{x \mid x\neq 0\}$，两个函数定义域不同，故不能选（A).

在（B）中，由于函数 $y=2\lg x$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，而 $y=\lg x^2$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，两个函数定义域不同，故不能选（B).

在（C）中，函数 $y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，函数 $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0，+\infty)$，故不能选（C).

在（D）中，两个函数的定义域都是 $\mathbf{R}$，又 $\sqrt{x^2}=|x|$，两个函数对应法则也相同，故选（D).

（2）函数 $y=\sqrt{2-x}+\dfrac{x^2+2x}{x-1}$ 定义域是（　　）.

（A）$(-\infty，1)\cup(1，2]$　　（B）$(-\infty，1)$

（C）$(1，2]$　　（D）$(-\infty，1)\cup(1，2)$

分析：解不等式组 $\begin{cases}2-x\geqslant 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$ 得 $x\leqslant 2$ 且 $x\neq 1$，故选（A).

点评： 求函数的定义域，即求使函数有意义的自变量 x 的取值集合，通常应遵循的原则：①若 $f(x)$ 为分式，则分母不为零；②若 $f(x)$ 为偶次根式，则被开方式为非负数；③若 $f(x)$ 为对数，则其底数大于 0 且不等于 1，真数为正数；④若 $f(x)$ 为 0 次幂，则底数不为 0；⑤若 $f(x)$ 是由几个部分的数学式子构成，其定义域是使各部分式子都有意义的实数的集合.

（3）正方形边长是 3，若边长增加 x，则面积增加 y. 则 y 与 x 的函数关系为（　　）.

（A）$y=(x+3)^2$，$x\in[3，+\infty)$　　（B）$y=(x+3)^2-9$，$x\in[3，+\infty)$

（C）$y=(x+3)^2$，$x\in[0，+\infty)$　　（D）$y=(x+3)^2-9$，$x\in[0，+\infty)$

分析：根据正方形面积公式 $S=a^2$ 列式，寻求函数关系式，结合实际问题求自变量 x 满足的条件，故选（D).

点评： 在实际问题中，函数自变量 x 的取值既要使解析式有意义，还要使实际问题本身有意义.

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1，& x>0\\ 2^x，& x\leqslant 0\end{cases}$，则 $f[f(-1)]$ 等于（　　）.

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）$\dfrac{3}{2}$

分析：当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=2^x$，故 $f(-1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$；

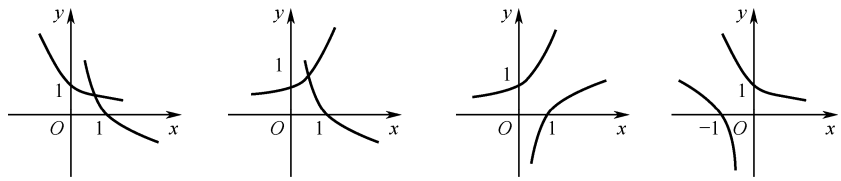
当 $x>0$ 时，$f(x)=x+1$，故 $f[f(-1)]=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，故选（D).

（5）若 $\log_5 2=a$，$5^b=3$，则 $5^{3a-2b}=$（　　）.

（A）$\dfrac{8}{9}$　　（B）$\dfrac{9}{8}$　　（C）-1　　（D）1

分析：$\log_5 2=a$ 可化为指数式 $5^a=2$，则 $5^{3a-2b}=5^{3a}5^{-2b}=(5^a)^3(5^b)^{-2}=2^3\times 3^{-2}=\dfrac{8}{9}$，故选（A).

（6）函数 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图像可能是（　　）.



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

解法一：直接分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况，在同一坐标系中画出两个函数的图像，与所给答案对照.

解法二：排除法. 在（A）中，$y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图像反映函数是减函数，$0<\dfrac{1}{a}<1$，则 $a>1$，$y=\log_a x$ 图像不符合. 在（C）中，$y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 是增函数，$\dfrac{1}{a}>1$，则 $0<a<1$，$y=\log_a x$ 的图像也不符合. 在（D）中 $y=\log_a x$ 的图像显然不对，故选（B）.

点评：函数图像是研究函数性质的直观模型，通过对图像题的练习，可以加深对函数性质的掌握.

（7）函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$ 为（　　）.

（A）奇函数　　（B）偶函数

（C）非奇非偶函数　　（D）既是奇函数，又是偶函数

分析：因为 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，又 $f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，故选（A）.

（8）函数 $y=\lg|x|$ 是（　　）.

（A）偶函数，在区间 $(-\infty，0)$ 上单调递增

（B）偶函数，在区间 $(-\infty，0)$ 上单调递减

（C）奇函数，在区间 $(0，+\infty)$ 上单调递增

（D）奇函数，在区间 $(0，+\infty)$ 上单调递减

分析：由于 $y=\lg|x|$ 是偶函数，排除（C）与（D）；而函数 $y=\lg|x|$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，该函数在 $(-\infty，0)$ 上单调递减，故选（B）.

（9）已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，则 $f(2)=$（　　）.

（A）-10　　（B）10　　（C）-50　　（D）-26

解法一：由 $f(-2)=10$ 知 $(-2)^5+a(-2)^3+b(-2)-8=10$，可得 $8a+2b=-50$，故 $f(2)=32+8a+2b-8=8a+2b+24=-26$.

解法二：令 $g(x)=x^5+ax^3+bx$，则 $f(x)=g(x)-8$，由 $f(-2)=g(-2)-8=10$ 得 $g(-2)=18$，因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $g(2)=-18$，故 $f(2)=g(2)-8=-18-8=-26$，故选（D）.

点评：在解法一中，把“$8a+2b$”看成一个整体，然后整体代入求解；在解法二中，构造了奇函数 $g(x)=x^5+ax^3+bx$，然后利用奇函数的知识求解.

【例 2】已知 $f(x)$ 是奇函数，且 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x+x^2$，求 $x<0$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式.

解：设 $x<0$，则 $-x>0$，

因为 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x+x^2$，

所以 $f(-x)=(-x)+(-x)^2=-x+x^2$，

又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

所以 $-f(x)=-x+x^2$，即 $f(x)=x-x^2$，

所以 $x<0$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x-x^2$.

【例 3】已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像过点（0，1），且满足 $f(x+1)=f(x)+x+1$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式.

（2）当 $f(x)\leqslant 7$ 时，求对应的 x 的取值范围.

解：（1）由 $f(x+1)=f(x)+x+1$ 可知

$$ax^2+(2a+b)x+(a+b+c)=ax^2+(b+1)x+(c+1),$$

故有 $\begin{cases}2a+b=b+1\\ a+b+c=c+1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

又由函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像过点（0，1），知 $c=1$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+1$.

（2）当 $f(x)\leqslant 7$ 时，即 $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+1\leqslant 7$，解得 $-4\leqslant x\leqslant 3$，所以对应的 x 的取值范围是 $[-4，3]$.

【例 4】已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

（1）求证：函数 $f(x)$ 是奇函数.

（2）若 $a>b>1$，试比较 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的大小.

分析：根据函数奇偶性定义证明 $f(x)$ 是奇函数，运用作差比较法比较 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的大小.

（1）证明：因为 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，又 $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

（2）解：$f(a)-f(b)=\dfrac{a}{a^2+1}-\dfrac{b}{b^2+1}=\dfrac{a(b^2+1)-b(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}=\dfrac{ab^2-ba^2+a-b}{(a^2+1)(b^2+1)}=\dfrac{(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$，

因为 $a>b>1$，所以 $a-b>0$，$1-ab<0$，又 $a^2+1>0$，$b^2+1>0$，

所以 $\dfrac{(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}<0$，即 $f(a)-f(b)<0$，故 $f(a)<f(b)$.

点评：证明函数为奇函数时，首先求出函数的定义域，并判断是否关于原点对称，然后再证明 $f(-x)=-f(x)$.

【例 5】已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{mx^2+mx+1}$，若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 m 的取值范围.

分析：由 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，可知 $mx^2+mx+1\neq 0$ 对任意实数 x 恒成立. 应分两种情况讨论：（1）$m=0$.（2）$m\neq 0$.

解：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $mx^2+mx+1\neq 0$ 对任意实数 x 恒成立.

（1）若 $m=0$ 时，$f(x)=1$，此时函数的定义域是 **R**，所以 $m=0$ 满足题意.

（2）当 $m\neq0$ 时，由题意可知 $mx^2+mx+1\neq0$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $\Delta=m^2-4m<0$，解得 $0<m<4$.

综合（1）和（2），求得实数 m 的取值范围是 $\{m|0\leqslant m<4\}$.

点评：不等式 $ax^2+bx+c>$(或$<$) 0 恒成立，若二次项系数含有字母时，必须分 $a=0$ 和 $a\neq0$ 两种情况来讨论.

【例 6】已知二次函数 F_1 的图像过点 $A(0，5)$，$B(1，4)$，$C(-2，-5)$，二次函数 F_2 的图像与 F_1 的图像关于原点对称，求 F_2 的解析式.

解：因为 F_1 的图像与 F_2 的图像关于原点对称，故 F_1 上关于原点对称的点必在 F_2 上.

设 $A(0，5)$，$B(1，4)$，$C(-2，-5)$关于原点的对称点分别为 $A_1(0，-5)$，$B_1(-1，-4)$，$C_1(2，5)$，则 A_1，B_1，C_1 必在 F_2 上．设 F_2 的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

由题意得 $\begin{cases}c=-5\\a-b+c=-4\\4a+2b+c=5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-5\end{cases}$，

所以函数 F_2 的解析式为 $y=2x^2+x-5$.

点评：求已知函数的解析式通常采用待定系数法，本题使用了二次函数的一般式 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$．亦可根据具体情况选择交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ 或顶点式 $y=a(x-h)^2+k$.

【例 7】求二次函数 $f(x)=x^2-x+1$，$x\in[0，3]$ 的最大值和最小值.

解：因为 $f(x)=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$，且 $x\in[0，3]$，

所以当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$；当 $x=3$ 时，$f(3)=7$；当 $x=0$ 时，$f(0)=1$，

所以函数 $f(x)$的最小值是 $\dfrac{3}{4}$，最大值是 7.

点评：二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$在$(-\infty,+\infty)$内只有最大值(当 $a<0$ 时)或最小值(当 $a>0$ 时)，但在 $[\alpha, \beta]$上既有最大值又有最小值，其最值可按以下方法求解:

（1）配方:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

（2）根据二次函数的对称轴与所给区间的相对位置求解:

当 $-\dfrac{b}{2a}\in[\alpha，\beta]$时，则 $f(\alpha)$，$f(\beta)$及 $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$这三个数中的最大、最小值即为二次函数在 $[\alpha，\beta]$上的最大、最小值.

当 $-\dfrac{b}{2a}\notin[\alpha，\beta]$时，则 $f(\alpha)$，$f(\beta)$中的最大、最小值即为二次函数在 $[\alpha，\beta]$上的最大、最小值.

【例 8】解不等式 $\log_3(2x-1)<\log_3(x+7)$.

解：因为原不等式等价于不等式组$\begin{cases}2x-1>0\\x+7>0\\2x-1<x+7\end{cases}$，解得$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\x>-7\\x<8\end{cases}$.

所以原不等式的解集为$\left(\dfrac{1}{2},\ 8\right)$.

点评：解对数不等式时，除了要根据对数函数的单调性，将对数不等式化为整式不等式，还要考虑对数的底数及真数的取值范围，避免将解集扩大.

【例 9】某市为鼓励居民节约用电，采用阶梯电价的收费方式．居民当月用电量不超过 100 kW·h 的部分，按基础电价收费；超过 100 kW·h 不超过 150 kW·h 的部分，按 0.8 元/千瓦时收费；超过 150 kW·h 的部分按 1.2 元/千瓦时收费．该市居民当月用电量 x（kW·h）与应付电费 y（元）的函数图像如图 3-2 所示.

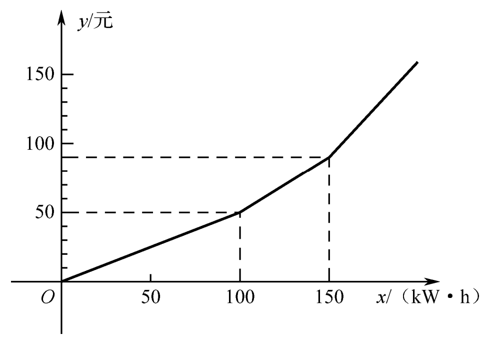


图 3-2

（1）求该市居民用电的基础电价是多少元/千瓦时？

（2）某居民 8 月份的用电量为 210 kW·h，求应付电费多少元？

（3）当 $x\in(100，150]$时，求 x 与 y 的函数关系式（x 为自变量）.

解：（1）设该市居民用电的基础电价是 k_1 元/千瓦时，则用电量 x（千瓦时）与应付电费 y（元）的函数关系是 $y=k_1x$ $(0\leqslant x\leqslant 100)$，

由函数图像过点(100，50)，可得 $50=100\,k_1$，即 $k_1=0.5$，所以 $y=0.5x$，

即基础电价为 0.5 元/千瓦时.

（2）由阶梯电价曲线可知，在 210 kW·h 电中，

100 kW·h 的电费为 $y_1=0.5\times100=50$（元）；

50 kW·h 的电费为 $y_2=0.8\times50=40$（元）；

60 kW·h 的电费为 $y_3=1.2\times60=72$（元）.

所以，该居民 8 月份应付电费：50+40+72=162（元）.

（3）设函数解析式为 $y=k_2\,x+b$，$x\in(100，150]$，由题意可知 $k_2=0.8$，

又因为函数图像经过点(150，90)，因此 $90=150\times0.8+b$，解得 $b=-30$，

所以所求函数解析式为 $y=0.8x-30$，$x\in(100，150]$.

【例 10】某种商品原来销售单价为 20 元，每天可以销售 300 件，适当地涨价，可以使每天的销售收入增加．假设这种商品的单价为整数，若单价每上涨 1 元，则日销售量减少 5 件.

求：（1）销售单价为多少元时，每天的销售收入最多？

（2）使每天的销售收入超过 6000 元的商品单价的范围.

解：设销售单价为 x 元，则单价提高了$(x-20)$元，日销售量减少了 $5(x-20)$件，实际日销售量为$[300-5(x-20)]$件.

（1）因为每天的销售收入 $y=x[300-5(x-20)]=-5(x-40)^2+8000$，$x\in[20，80]$，$x\in\mathbf{Z}$，

所以当 $x=40$（元）时，$y_{max}=8000$（元）.

（2）因为要使涨价后每天的销售收入超过 6000 元，

即$-5(x-40)^2+8000>6000$，

所以 $20<x<60$，依题意 $x\in\mathbf{Z}$.

答：（1）销售单价为 40 元时，每天的销售收入最大，为 8000 元.

（2）使每天的销售收入超过 6000 元的商品单价的范围是高于 20 元且低于 60 元的整数.

点评：在解答销售问题时，我们要理解销售术语的含义及关系，如“单价”“销售量”“成本”“销售收入”“利润”等，通过构造二次函数求出最值，通过构造二次不等式求出使收入增加的商品的定价范围.

习　题　三

1．选择题

（1）函数 $f(x)=x^2-1$，则 $f(x+1)=$（　　）.

（A）x^2-1　　（B）x^2-x　　（C）x^2+2x　　（D）x^2-2x

（2）函数 $y=\dfrac{1}{\lg x}$ 的定义域是（　　）.

（A）$(0，+\infty)$　　（B）$(0，1)\cup(1，+\infty)$

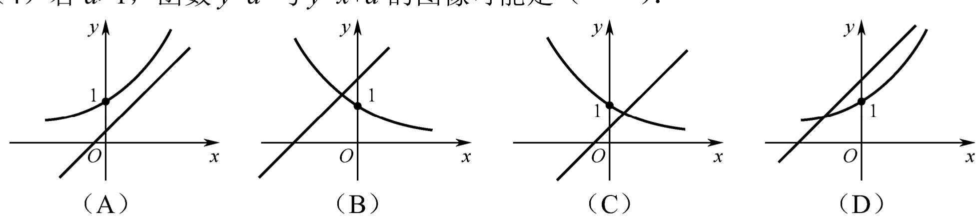
（C）$(0，1)$　　（D）$(1，+\infty)$

（3）函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ 为（　　）.

（A）奇函数　　（B）偶函数

（C）既为奇函数，又为偶函数　　（D）非奇非偶函数

（4）若 $a>1$，函数 $y=a^x$ 与 $y=x+a$ 的图像可能是（　　）.



（5）不等式 $1+\lg|x|<0$ 的解集是（　　）.

（A）$\left(-\dfrac{1}{10}，0\right)\cup\left(0，\dfrac{1}{10}\right)$　　（B）$\left(-\dfrac{1}{10}，\dfrac{1}{10}\right)$

（C）$(-10，0)\cup(0，10)$　　（D）$(-10，10)$

（6）已知 $a=\lg x$，则 $a+3=$（　　）.

（A）$\lg(3x)$ （B）$\lg(1000x)$ （C）$\lg(x+3)$ （D）$\lg x^3$

（7）函数 $f(x)$的图像关于原点对称，$g(x)=f(x)+3$ 且 $g(1)=5$，则 $g(-1)=$（ ）.

（A）1 （B）−1 （C）5 （D）−5

（8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_x 4, & x>0\\ 2^{kx-1}, & x\leqslant 0\end{cases}$，若 $f(2)=f(-2)$，则 $k=$（ ）.

（A）1 （B）$\frac{1}{2}$ （C）−1 （D）$-\frac{1}{2}$

（9）若抛物线 $y=3x^2-2x+k$ 与 x 轴没有公共点，则 k 的取值范围是（ ）.

（A）$k>3$ （B）$k>\frac{1}{3}$ （C）$k<\frac{1}{3}$ （D）不能确定

（10）函数 $f(x)$是奇函数且在 **R** 上是增函数，则不等式$(x-1)\cdot f(x)\geqslant 0$ 的解集为（ ）.

（A）$[0，1]$ （B）$[1，+\infty)$

（C）$(-\infty，0]$ （D）$(-\infty，0]\cup[1，+\infty)$

（11）“$2^a>2^b$ ”是“$\log_2 a>\log_2 b$”的（ ）.

（A）充分条件 （B）必要条件

（C）充要条件 （D）既不是充分又不是必要条件

（12）函数 $y=(a^2-2a+3)^x$ 在（$-\infty$，$+\infty$)上一定是（ ）.

（A）递增函数 （B）先递增后递减函数

（C）递减函数 （D）先递减后递增函数

（13）下列函数中，既是奇函数又是增函数的是（ ）.

（A）$y=3^x$ （B）$y=x$ （C）$y=\log_{0.5}x$ （D）$y=x^2$

（14）若 $f(x)=(2m-1)x^2+2mx+3$ 为偶函数，则 $f(x)$的图像在区间$(-3，-1)$上是（ ）.

（A）增函数 （B）减函数 （C）先增后减 （D）先减后增

（15）已知二次函数 $f(x)$的图像经过点$(0，3)$，$(2，3)$，且最大值是 5，则该函数的解析式是（ ）.

（A）$f(x)=2x^2-8x+11$ （B）$f(x)=-2x^2+8x-1$

（C）$f(x)=2x^2-4x+3$ （D）$f(x)=-2x^2+4x+3$

（16）若函数 $f(x)=3x^2+(a-1)x+5$ 在（$-\infty$，1]上是减函数，则 a 的取值范围是（ ）.

（A）$a=-5$ （B）$a\leqslant -5$ （C）$a=5$ （D）$a\geqslant 5$

（17）图 3-3 所示的是指数函数 ①$y_1=a^x$，②$y_2=b^x$，③$y_3=c^x$，④$y_4=d^x$ 的图像，则 a，b，c，d 与 1 的大小关系是（ ）.

（A）$a<b<1<c<d$

（B）$b<a<1<d<c$

（C）$1<a<b<c<d$

（D）$a<b<1<d<c$

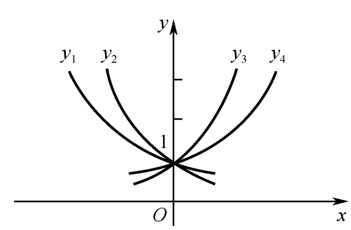


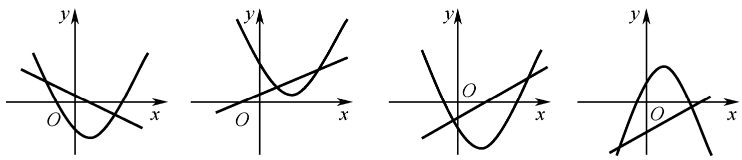
图 3-3

（18）若点$(a，b)$在 $y=\lg x$ 的图像上，则下列点也在此图像上的是（ ）.

（A）$\left(\frac{1}{a},\ b\right)$　　（B）$(a^2,\ 2b)$

（C）$(10a,\ 1-b)$　　（D）$\left(\frac{10}{a},\ b+1\right)$

（19）同一坐标系中，$y=ax^2+bx+c$ 与 $y=ax+b$ 的图像是（　　）.



（A）　（B）　（C）　（D）

（20）对于定义在 **R** 上的函数 $f(x)$，对任意两个不相等实数 x_1，x_2，总有 $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0$ 成立，则必有（　　）.

（A）$f(-2)>f(1)$　（B）$f(-2)\geqslant f(1)$　（C）$f(-2)<f(1)$　（D）$f(-2)\leqslant f(1)$

2．填空题

（1）已知函数 $f(x)=\lg x$，若 $f(ab)=1$，则 $f(a^2)+f(b^2)=$__________.

（2）已知点 $P(\lg a,\ 1)$ 与点 $Q(2,\ 2^b)$ 关于 y 轴对称，则 $a+b=$__________.

（3）已知函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+2$，则 $f(-1)=$________.

（4）若 $\log_5 2=a$，$\frac{\lg 3}{\lg 5}=b$，则 $5^{2a-b}=$__________.

（5）如果 $\lg x=2\lg a+3\lg b-\lg c$，则 $x=$__________.

（6）函数 $f(x)=\sqrt{4-|x-3|}$ 的定义域是__________.

（7）已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数又是减函数，且 $f(a)+f(1)>0$，则 a 的取值范围是__________.

（8）设函数 $f(x)=\frac{(x+1)(x+a)}{x}$ 为奇函数，则 a 的值是__________.

（9）函数 $y=2x^2-6x+3$ 在区间 $[-2,\ 4]$ 上的最大值是__________.

（10）函数 $y=x^2-2x$ 的图像 F_1 关于 x 轴对称的图像 F_2 的函数表达式是__________.

（11）二次函数 $y=2x^2+mx+n$ 的图像的顶点坐标是 $(1,\ 1)$，则 mn 的值是__________.

（12）若函数 $y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$），当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，函数的最大值比最小值大 $\frac{a}{2}$，则实数 a 的值是__________.

3．设二次函数 $f(x)=ax^2+(b-2)x+2b-3a$ 是定义在 $[-6,\ 2a]$ 上的偶函数．求：

（1）a 和 b 的值.

（2）不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}>2^{-2x}$ 的解集.

4．已知函数 $f(x)=x^3+mx$ 的图像过点（1，5）．

（1）求实数 m 的值．

（2）判断函数 $f(x)$的奇偶性并证明．

5．抛物线 $y=x^2-5mx-6$ 与 x 轴交于 A，B 两点，与 y 轴交于 C 点，求△ABC 的面积的最小值．

6．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像过点（0，5），且满足 $f(x)=f(2-x)$，$f(-1)=2f(1)$．求：

（1）$f(x)$的解析式．

（2）当 $f(x)\leqslant 13$ 时，x 的取值范围．

7．函数 $f(x)=x^2+(m-1)x+4$，其中 m 为常数．

（1）若函数 $f(x)$在区间 $(-\infty，0)$上单调递减，求实数 m 的取值范围．

（2）若 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)>0$，求实数 m 的取值范围．

8．已知某城市 2018 年底人口总数为 200 万人，假设此后该城市人口的平均增长率为 1%（不考虑其他因素）．

（1）如果经过 x 年后该城市人口总数为 y 万人，试写出 y 与 x 的函数关系式．

（2）如果该城市人口总数达到 210 万，那么至少需要经过多少年（精确到 1 年）？

9．如图 3-4 所示，在体育测试时，一名高个子男同学推铅球，已知铅球所经过的路线是某个二次函数图像的一部分，这个男同学的出手处 A 点的坐标为(0，2)，铅球路线的最高处 B 点的坐标为(6，5)．

（1）求这个二次函数的解析式．

（2）该男同学把铅球推出去多远？（精确到 0.01 m）

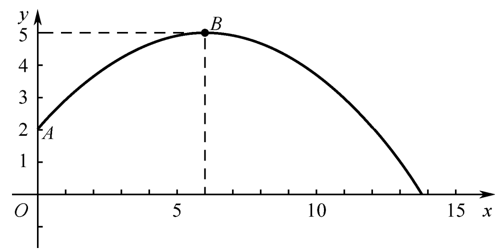


图 3-4

测 试 题 三

（时间为 90 分钟，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分）

1．下列函数中与 $y=x$ 是同一函数的是（　　）．

（A）$y=\dfrac{x^2}{x}$　　（B）$y=\sqrt{x^2}$　　（C）$y=(\sqrt{x})^2$　　（D）$y=\sqrt[3]{x^3}$

2．函数 $y=\lg(2x-1)+(x^2-4)^0$ 的定义域为（　　）．

（A）$\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$　　（B）$\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)\cup(2, +\infty)$

（C）$\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$　　（D）$\left[\dfrac{1}{2}, 2\right)\cup(2, +\infty)$

3．设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则满足条件 $f(2a)>f(3-a^2)$ 的实数 a 的取值范围是（　　）．

（A）$-3<a<1$　　（B）$a>1$ 或 $a<-3$

（C）$a>3$ 或 $a<-1$　　（D）$-1<a<3$

4．奇函数 $f(x)$ 在区间[3，6]上是增函数，且最大值为 8，最小值为−1，则 $2f(-6)+f(-3)$ 的值为（　　）．

（A）15　　（B）6　　（C）−15　　（D）−6

5．已知函数 $f(x)$ 是奇函数，则下列叙述正确的是（　　）．

（A）$f(x)-f(-x)=0$　　（B）$f(x)+f(-x)=0$

（C）$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$　　（D）$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$

6．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ 的图像对称轴是 $x=1$，且过点$(-1，7)$，则 a 与 b 的值分别是（　　）．

（A）2，4　　（B）2，−4　　（C）−2，4　　（D）−2，−4

7．二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像过原点，且顶点在第二象限内，则 a，b，c 应满足的条件为（　　）．

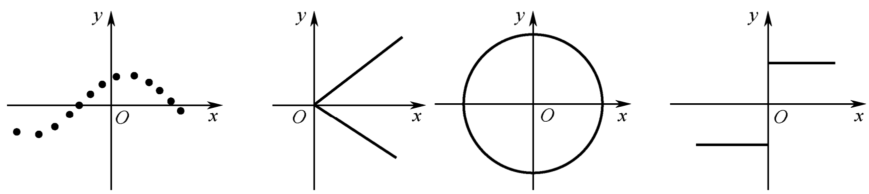
（A）$a>0$，$b<0$，$c>0$　　（B）$a<0$，$b>0$，$c<0$

（C）$a>0$，$b>0$，$c=0$　　（D）$a<0$，$b<0$，$c=0$

8．已知 $\log_2 a=\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=4$，则 $a+b=$（　　）．

（A）$-\sqrt{2}+2$　　（B）$\sqrt{2}+2$　　（C）$\sqrt{2}-2$　　（D）$-\sqrt{2}-2$

9．下列图像表示函数的是（　　）．



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

10．如果 $P(a，b)$是函数 $y=\log_2 x$ 图像上的一个点，则下列各点一定在 $y=2^x$ 的图像上的是（　　）．

（A）$(b，a)$　　（B）$(a，b)$　　（C）$(2^a，b)$　　（D）$(2^b，a)$

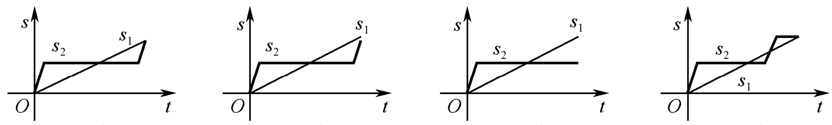
11．已知函数 $f(x)$是奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2+2x$，那么在$(-\infty，0)$上函数有（　　）．

（A）最小值−2　　（B）最小值−1　　（C）最大值 1　　（D）最大值 2

12．下列函数中是偶函数的是（　　）．

（A）$y=|\lg x|$　　（B）$y=x^2+2x$　　（C）$y=2^x+2^{-x}$　　（D）$y=|x+1|$

13．“龟兔赛跑”讲述了这样的故事：领先的兔子看着慢慢爬行的乌龟，骄傲起来，睡了一觉，醒来时，发现乌龟快到终点了，于是急忙追赶，但为时已晚，乌龟还是先到达了终点．用 s_1、s_2 分别表示乌龟和兔子所行的路程，t 为时间，则与故事情节相吻合的图像是（　　）．



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

14．若函数 $y=\lg m\cdot x^2-2x+1$ 与 x 轴有一个交点，则 m 的值为（　　）．

（A）10　　（B）$(10，+\infty)$　　（C）$(1，+\infty)$　　（D）1 或 10

15．若函数 $f(x)=\lg x$，对于任意正数 x，y 都有（　　）．

（A）$f(xy)=f(x)f(y)$　　（B）$f(xy)=f(x)+f(y)$

（C）$f(x+y)=f(x)f(y)$　　（D）$f(x+y)=f(x)+f(y)$

16．设 $f(x)=0.5^x$，则下列正确的是（　　）．

（A）$x<0$ 时，$f(x)<1$　　（B）$x>0$ 时，$f(x)>1$

（C）$x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$　　（D）$x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$

17．已知 $\log_3 a>\log_3 b>0$，则（　　）．

（A）$a>b>1$　　（B）$b>a>1$　　（C）$0<a<b<1$　　（D）$0<b<a<1$

18．如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数均有 $f(-x)=f(x)$，那么（　　）．

（A）$f(-2)<f(1)<f(3)$　　（B）$f(3)<f(-2)<f(1)$

（C）$f(-2)<f(3)<f(1)$　　（D）$f(1)<f(-2)<f(3)$

19．设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x+2x+b$（b 为常数），则 $f(-1)=$（　　）．

（A）3　　（B）-3　　（C）-2.5　　（D）2.5

20．若 $\lg a$，$\lg b$ 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个实根，则 ab 的值等于（　　）．

（A）2　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\sqrt{10}$　　（D）100

二、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 3 分，共 12 分）

21．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\leqslant -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$，若 $f(a)=9$，则 a 的值是______．

22．某纯净水制造厂在净化水的过程中，每增加一次过滤可减少水中杂质 60%，要使水中杂质减少到原来的 5%以下，则至少需要过滤的次数为______．

23．函数 $f(x)=a-\dfrac{2}{2^x+1}$ 为奇函数，则实数 a 的值为______．

24．已知 $10^a=2$，$\lg x=a$，则实数 $x=$______．

三、解答题（本大题共 4 个小题，共 28 分，解答应写出推理、演算步骤）

25．（6 分）函数 $y=\log_3(x^2+ax-a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围．

26．（7 分）已知函数 $f(x)=\log_2(3+x)-\log_2(3-x)$．

（1）求函数的定义域，并判断函数的奇偶性．

（2）若 $f(t)=1$，求实数 t 的值．

27.（7 分）如图 3-5 所示，已知等边△OAB 的边长为 2，直线 $l\perp OA$，l 截这个三角形所得的图形位于 l 的左方部分（图中阴影部分）的面积为 y，O 到 l 的距离为 $x(0\leqslant x\leqslant 2)$.

求出函数 $y=f(x)$ 的解析式.

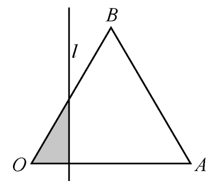


图 3-5

28.（8 分）某商场购进一批单价为 16 元的日用品，经试验发现，若按每件 20 元的价格销售时，每月能卖 360 件，若按每件 25 元的价格销售时，每月能卖 210 件，假定每月销售件数 y（件）是单价 x（元/件）的一次函数.（注：该日用品的单价为整数）

（1）试求 y 与 x 之间的关系式.

（2）在商品不积压，且不考虑其他因素的条件下，问销售价格定为多少时，才能使每月获得最大利润？每月的最大利润是多少？

平凡的脚步可以走完伟大的行程，再长的路，一步步也能走完；不迈开双脚，再短的路也无法到达。

第四章
数　　列

【复习要求】

数列可以看作定义在正整数集或其子集上的一种函数，因此，常常可以用函数思想方法解决数列问题．本部分的复习，要强化对教材内容的把握，例如，等差数列和等比数列的定义、通项公式及前 n 项和公式，会运用数列知识解决实际问题等．我们对数列部分的复习建议如下：

1．理解数列概念和数列通项公式的意义．

2．掌握等差数列和等差中项的概念，掌握等差数列的通项公式及前 n 项和公式，并能解决简单的实际问题．

3．掌握等比数列和等比中项的概念，掌握等比数列的通项公式及前 n 项和公式，并能解决简单的实际问题．

【知识框图】

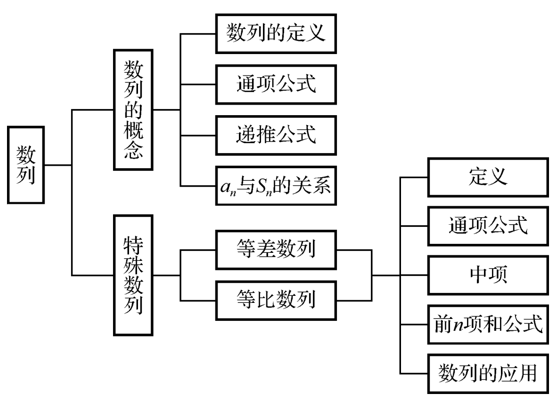


图 4-1

【知识要点】

1．数列的概念

按一定次序排列的一列数叫作数列．数列的一般形式为：a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，可

简记为$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}_+)$. 数列中的每一个数都叫作这个数列的项，$a_n$ 是数列的第 n 项.

2．数列的分类

有穷数列：项数有限的数列.

无穷数列：项数无限的数列.

3．数列的通项公式

用序号 n 表示数列相应项的公式叫作数列的通项公式. 一般情况下，数列的项 a_n 是序号 n 的函数.

（1）如果知道数列$\{a_n\}$的通项公式，那么可以求出这个数列的任意一项.

（2）有的数列，如果知道它的前几项，可以写出满足条件的一个通项公式.

注意：①在写数列的通项公式时，其结果不一定是唯一的.

②不是所有的数列都有通项公式.

4．数列的前 n 项和 S_n 与数列的第 n 项 a_n 的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}$$

5．等差数列与等比数列（如表 4-1 所示）

表 4-1 等差数列与等比数列

名称	等差数列	等比数列
定义	从第 2 项起，每一项与它前一项的差都等于同一常数，则这个数列叫作等差数列	从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于同一常数，则这个数列叫作等比数列
一般形式	a_1，a_1+d，a_1+2d，… （d 为公差）	a_1，a_1q，a_1q^2，… （q 为公比，$a_1\neq 0$ 且 $q\neq 0$）
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}\quad(q\neq 0)$
前 n 项和公式	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$	$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}\quad(q\neq 1)$ $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}\quad(q\neq 1)$ $S_n=na_1\quad(q=1)$
中项	a 与 b 的等差中项是 $A=\dfrac{a+b}{2}$	a 与 b 的等比中项是 $G=\pm\sqrt{ab}$ 或 $G^2=ab$
性质	（1）$a_m-a_n=(m-n)d$ （2）若 $m+n=p+q\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q$	（1）$\dfrac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$ （2）若 $m+n=p+q\Rightarrow a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+1\ (n\in\mathbf{N}_+)$，则 a_4 的值是（　　）.

（A）67　　（B）22　　（C）202　　（D）201

分析：$a_2=3a_1+1=3\times 2+1=7\Rightarrow a_3=3a_2+1=22\Rightarrow a_4=3a_3+1=67$，故选（A）.

（2）在数列$\{a_n\}$中，若 $S_n=2n^2-n$，则 $a_7+a_8+a_9+a_{10}=$（　　）.

（A）123　　（B）124　　（C）190　　（D）99

分析：$a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}-S_6=(2\times10^2-10)-(2\times6^2-6)=124$，故选（B）.

（3）已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_1+a_3+a_5=105$，$a_2+a_4+a_6=99$，则a_{20}等于（　　）.

（A）−1　　（B）1　　（C）3　　（D）7

解法一：由已知得$\begin{cases}a_1+a_1+2d+a_1+4d=105\\a_1+d+a_1+3d+a_1+5d=99\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+2d=35\\a_1+3d=33\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=39\\d=-2\end{cases}$，所以 $a_{20}=a_1+19d=39+19\times(-2)=1$，故选（B）.

解法二：因为$a_1+a_3+a_5=105$，即$3a_3=105$，所以$a_3=35$，同理可得 $a_4=33$，因此公差 $d=a_4-a_3=-2$，所以 $a_{20}=a_4+(20-4)\times d=1$，故选（B）.

点评：在等差数列中，常常通过解方程组把 a_1，d 两个基本量求出，再利用通项公式或前 n 项和公式求出其余量，如解法一；如果在解题中能正确运用数列的有关性质，则可以简化运算过程，提高解题效率，如解法二.

（4）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{15}=33$，$a_{45}=153$，则 217 是这个数列的（　　）.

（A）第 60 项　　（B）第 61 项　　（C）第 62 项　　（D）第 63 项

分析：因为$a_n=a_1+(n-1)d$，所以$a_{15}=a_1+14d$，$a_{45}=a_1+44d$，

从而$\begin{cases}a_{15}=a_1+14d=33\\a_{45}=a_1+44d=153\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=-23\\d=4\end{cases}$.

设 217 是这个数列的第 m 项，则$217=-23+(m-1)\times4$，解得 $m=61$，故选（B）.

（5）等比数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=100$，且 $q=2$，则 S_{100} 等于（　　）.

（A）100　　（B）200　　（C）300　　（D）400

分析：由等比数列的性质可知

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99})\,q=100\times2=200,$$

故 $S_{100}=100+200=300$．故选（C）.

（6）设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $a_2=3$，$a_6=11$，则 S_7 等于（　　）.

（A）13　　（B）35　　（C）49　　（D）63

分析：$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=\dfrac{7(a_2+a_6)}{2}=\dfrac{7\times(3+11)}{2}=49$，故选（C）.

或由$\begin{cases}a_2=a_1+d=3\\a_6=a_1+5d=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，$a_7=1+6\times2=13$.

所以$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=\dfrac{7\times(3+11)}{2}=49$，故选（C）.

（7）数列$a_n=1-\cos n\pi$，则S_9的值为（　　）.

（A）4　　（B）6　　（C）8　　（D）10

分析：本题主要考查数列的项、前 n 项和，此问题关键是找规律.

由 $a_n=1-\cos n\pi$ 知，$a_1=1-\cos\pi=2$，$a_2=1-\cos2\pi=0$，$a_3=1-\cos3\pi=2$，$a_4=1-\cos4\pi=0$，…，所以 $S_9=2+0+2+0+\cdots+2=10$，故选（D）.

（8）若 $2^a=3$，$2^b=9$，$2^c=27$，则 a，b，c 构成（　　）.

（A）等差数列　　（B）等比数列

（C）既是等差数列又是等比数列　　（D）既不是等差数列又不是等比数列

分析：由题意知 $a=\log_2 3$，$b=\log_2 9$，$c=\log_2 27$，因为 $b-a=\log_2 9-\log_2 3=\log_2 3$，$c-b=\log_2 27-\log_2 9=\log_2 3$，故 $b-a=c-b$，选（A）.

【例 2】填空题

（1）在数列$\{a_n\}$中，如果 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$ 且 $a_1=2$，则数列前 10 项之和等于________.

分析：由题意知数列$\{a_n\}$为等比数列，其中 $a_1=2$，$q=\dfrac{1}{2}$，故 $S_{10}=\dfrac{2\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1023}{256}$.

（2）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=20$，$a_n=54$，$S_n=999$，则 $n=$________，$d=$________.

分析：由等差数列前 n 项和公式得　$999=\dfrac{n(20+54)}{2}$，解得 $n=27$.

由等差数列的通项公式得　$54=20+(27-1)d$，解得 $d=\dfrac{17}{13}$.

点评：①学会运用函数与方程思想解题；

②抓住首项与公差（比）是解决等差（比）数列问题的关键；

③等差（比）数列的通项公式、前 n 项和公式涉及五个量：a_1，$d(q)$，n，a_n，S_n，知道其中任意三个就可以列方程组求出另外两个（即：知三求二）.

（3）在公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$中，a_1，a_2 是方程 $x^2-a_3x+a_4=0$ 的根，则$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=$________.

分析：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq0)$. 因为 a_1，a_2 是方程 $x^2-a_3x+a_4=0$ 的根，

所以$\begin{cases}a_1+a_2=a_3\\ a_1\bullet a_2=a_4\end{cases}$，即$\begin{cases}a_1+a_1+d=a_1+2d\\ a_1\bullet(a_1+d)=a_1+3d\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\ d=2\end{cases}$.

所以通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times2=2n$.

（4）等差数列$\{a_n\}$的首项为-24，从第 10 项开始为正，则公差 d 的范围为________.

分析：因为等差数列$\{a_n\}$的首项为-24，公差为 d，所以通项公式 $a_n=-24+(n-1)d$.

由题意得$\begin{cases}a_{10}>0\\ a_9\leqslant0\end{cases}$，即$\begin{cases}-24+9d>0\\ -24+8d\leqslant0\end{cases}$，解得 $\dfrac{8}{3}<d\leqslant3$.

【例 3】有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和是 16，第二个数与第三个数的和是 12，求这四个数.

解法一：设前三个数依次为 $a-d$，a，$a+d$，则第四个数是 $\dfrac{(a+d)^2}{a}$，

依题意得$\begin{cases}a-d+\dfrac{(a+d)^2}{a}=16\\ a+(a+d)=12\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=4\\ d=4\end{cases}$或$\begin{cases}a=9\\ d=-6\end{cases}$.

所以这四个数为 0，4，8，16 或 15，9，3，1.

解法二：设四个数依次为 x，y，$12-y$，$16-x$，

依题意得$\begin{cases}x+(12-y)=2y\\ y(16-x)=(12-y)^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$或$\begin{cases}x=15\\ y=9\end{cases}$.

所以这四个数为 0，4，8，16 或 15，9，3，1.

点评：①若三个数成等差数列，则一般将这三个数依次设为 $a-d$，a，$a+d$；

②若三个数成等比数列，则一般将这三个数依次设为 $\dfrac{a}{q}$，a，aq.

【例 4】设等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=5$，$a_{10}=-9$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式.

（2）求$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 及使得 S_n 最大的序号 n 的值.

解：（1）由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 及 $a_3=5$，$a_{10}=-9$ 得$\begin{cases}a_1+2d=5\\ a_1+9d=-9\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=9\\ d=-2\end{cases}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=11-2n$.

（2）解法一：由（1）知，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=10n-n^2$，

因为 $S_n=-(n-5)^2+25$.

所以 $n=5$ 时，S_n 取得最大值.

解法二：由（1）知，$a_n=11-2n$，所以当$\begin{cases}a_n\geqslant 0\\ a_{n+1}\leqslant 0\end{cases}$时，即$\begin{cases}11-2n\geqslant 0\\ 11-2(n+1)\leqslant 0\end{cases}$，

解得 $4.5\leqslant n\leqslant 5.5$. 又 $n\in\mathbf{N}$，所以 $n=5$ 时，S_n 取得最大值.

点评：①求等差数列的前 n 项和 S_n 的最大（小）值，可以用二次函数的知识求解（如解法一），也可以根据等差数列的特点，当首项 $a_1>0$，$d<0$ 时，使 $a_n\geqslant 0$ 的最大整数时，前 n 项和 S_n 有最大值，当首项 $a_1<0$，$d>0$ 时，使 $a_n\leqslant 0$ 的最大整数时，前 n 项和 S_n 有最小值（如解法二）.

②注意用解法二时，若 $a_n=0$，则 $S_n=S_{n-1}$，最大（小）值有两项.

【例 5】某房地产公司在 2016 年对某户型推出两种售房方案：第一种是一次性付款方案，购房的优惠价为 28.5 万元；第二种是分期付款方案，要求购房时缴纳首付款 10 万元，然后从第二年起连续十年，在每年的购房日向银行付款 2.25 万元．假设在此期间银行存款的年利率为 3%，若不考虑其他因素，试问：对于购房者来说，采用哪种方案省钱？请计算说明.（精确到 0.01）

解：第一种方案，付款十年后的本息之和为：

$$28.5\times(1+0.03)^{10}$$
$$\approx 38.30\text{（万元）}.$$

第二种方案，还款结束时实际付款的本息之和为：

$$10\times(1+0.03)^{10}+2.25\times(1+0.03)^9+2.25\times(1+0.03)^8+\cdots+2.25$$
$$=10\times1.03^{10}+\frac{2.25\times(1.03^{10}-1)}{1.03-1}$$
$$\approx 39.23\text{（万元）}.$$

因此对于购房者来说，采用第一种方案省钱.

点评：本例是数列应用的经典案例，多年来人们都在争论两种方案的优劣．有人说，“我第一年就交 10 万元，剩下 18.5 万元存入银行，每年取出 2.25 万元交给开发商，最后结果一定比第一种方案省钱！”这种说法对吗？请你用学过的数列知识计算并给出判断．

习　题　四

1．选择题

（1）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$，则a_4的值是（　　）．

（A）4　　（B）13　　（C）40　　（D）121

（2）在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_3=7$，$a_{10}-a_5=15$，则$a_n=$（　　）．

（A）$3n$　　（B）$3n-2$　　（C）$3n+1$　　（D）$3n-10$

（3）等差数列a_1，a_2，a_3，…，a_n的公差为d，则关于数列ca_1，ca_2，ca_3，…，ca_n(c为常数)，说法正确的是（　　）．

（A）公差为cd的等差数列　　（B）公差为d的等差数列

（C）公比为cd的等比数列　　（D）公比为d的等比数列

（4）已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n^2-4$，则a_4等于（　　）．

（A）16　　（B）12　　（C）8　　（D）4

（5）已知数列$\{a_n\}$的前n项和公式为$S_n=3n^2+2$，则这个数列的通项公式是（　　）．

（A）$a_n=6n-3$　　（B）$a_n=6n+3$　　（C）$a_n=6n-1$　　（D）以上都不对

（6）若数列$\{a_n\}$是首项为 23，且公差为整数的等差数列，前 6 项为正，从第 7 项开始均为负数，则此数列的公差d为（　　）．

（A）-1　　（B）-2　　（C）-3　　（D）-4

（7）函数$f(x)=a^x$（$a>0$且$a\neq1$），若$f(-2)=4$，则$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$等于（　　）．

（A）1024　　（B）1023　　（C）$\dfrac{1024}{1023}$　　（D）$\dfrac{1023}{1024}$

（8）在等差数列$\{a_n\}$中，若第 4 项为 15，则它的前 7 项的和为（　　）．

（A）120　　（B）115　　（C）110　　（D）105

（9）等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3=20$，$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=100$，$S_n=180$，则n等于（　　）．

（A）9　　（B）10　　（C）11　　（D）12

（10）等差数列$\{a_n\}$的前m项和为 20，前$2m$项和为 50，则它的前$3m$项和为（　　）．

（A）80　　（B）90　　（C）100　　（D）130

（11）四个数 1，a，3，b中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，则（　　）．

（A）$a=-2$，$b=\pm\dfrac{9}{2}$　　（B）$a=2$，$b=\pm\dfrac{9}{2}$

（C）$a=-2$，$b=\dfrac{9}{2}$　　（D）$a=2$，$b=\dfrac{9}{2}$

（12）某工厂为了节约水资源，不断进行技术创新，从而使得用水量逐月减少，如果该工厂今年一月份的用水量是 4000 m^3，计划从二月份起，每个月的用水量比上个月都减少 5%，那么预计该厂今年总用水量约（　　）.

（A）36 771 m^3　（B）36 772 m^3　（C）21 610 m^3　（D）48 000 m^3

（13）如果 a，b，c 为公差不为零的等差数列，那么二次函数 $y=ax^2+2bx+c$ 的图像与 x 轴交点的个数是（　　）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）不能确定

（14）设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，公比 $q=2$，且 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{20}=2^{20}$ 那么 $a_2\cdot a_4\cdot a_6\cdot\cdots\cdot a_{20}$ 等于（　　）.

（A）2^5　（B）2^{10}　（C）2^{16}　（D）2^{15}

（15）已知 $\lg x+\lg x^2+\cdots+\lg x^n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则 x 的值为（　　）.

（A）10　（B）100　（C）1000　（D）1

2．填空题

（1）数列 2，$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{5}{4}$，…的一个通项公式为________.

（2）设 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_6=6$，$a_{22}=3$，则 $a_{33}=$________.

（3）已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_2，a_3，a_6 成等比数列，则公比的值是________.

（4）设 x_1 和 x_2 是方程 $x^2+mx+1=0$ 的两个根，则 x_1 和 x_2 的等比中项是________.

（5）设 $\lg a_1$，$\lg a_2$，$\lg a_3$，$\lg a_4$ 是公差为 2 的等差数列，则 $\dfrac{a_4}{a_1}$ 的值是________.

（6）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$，且 a_1，a_3，a_9 成等比数列，则 $\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$ 的值是_____.

（7）若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2\cdot a_4=\dfrac{1}{2}$，则 $a_1\cdot a_3^2\cdot a_5=$________.

（8）在 -5 和 16 之间加入 n 个数，使这 $n+2$ 个数构成和是 88 的等差数列，则公差的值是________.

（9）已知等比数列 $\{a_n\}$，若 $a_1=1$，$a_n=3a_{n+1}$，则 $a_5=$________.

（10）$\{a_n\}$ 为等比数列，且 $\log_3 a_3+\log_3 a_6+\log_3 a_8+\log_3 a_{11}=4$，则 $a_5\cdot a_9=$________.

3．已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=-3$，$a_5+a_{10}=30$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（2）若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=540$，求 n 的值.

4．等差数列$\{a_n\}$的公差 d（$d\neq 0$）是方程 $x^2+3x=0$ 的根，前 6 项和 $S_6=a_6+10$，求 S_{10}．

5．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=2n^2-3n$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式．

（2）证明数列$\{a_n\}$是等差数列．

6．设 $y=f(x)$是一次函数，若 $f(0)=1$，且 $f(1)$，$f(4)$，$f(13)$成等比数列.

（1）求 $f(x)$的表达式．

（2）求 $f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)$.

7．已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$ 且 $a_2+a_4=\dfrac{20}{3}$．求数列$\{a_n\}$的通项公式．

8．设三个数成等差数列，且三个数的和等于 15，三个数的平方和等于 93，求这三个数．

9．已知数列$\{a_n\}$是等比数列，其中 $a_6=2$，且 a_4，a_5+1，a_6 成等差数列．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式．

（2）数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n，证明：$S_n<128$（$n=1$，2，3，…）．

10．已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，若$a_3 \cdot a_4=27a_2$，

（1）求a_5的值．

（2）设$b_n=\log_3 a_n$，$b_1=-1$，求数列$\{b_n\}$的前20项的和S_{20}．

11．甲、乙二人分别到A，B两家公司应聘，甲所应聘的A公司给出的条件是：第一年月薪2000元，以后每年的月薪增加400元；乙所应聘的B公司给出的条件是：第一年月薪2000元，以后每年的月薪增加15%．如果聘期确定为10年，则第十年甲和乙月薪分别是多少？甲和乙10年的总收入分别是多少元？（精确到1元）

测 试 题 四

（时间为 90 分钟，满分 100 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分）

1．已知数列的通项公式是 $a_n=n^2+n$，则 a_{10} 等于（　　）．

（A）100　　（B）110　　（C）20　　（D）200

2．已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，且 a_1，a_3，a_4 成等比数列，则 a_2 等于（　　）．

（A）−8　　（B）−6　　（C）8　　（D）6

3．等比数列$\{a_n\}$的前三项依次为 x，$2x+2$，$3x+3$，则此数列的第四项为（　　）．

（A）13.5　　（B）0　　（C）−13.5　　（D）10 或−13.5

4．等比数列 1，2，2^2，…，2^n 各项的和等于（　　）．

（A）2^n-1　　（B）$2^{n+1}-1$　　（C）2^{n+1}　　（D）2^n+2

5．若数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=4n^2-n$，则这个数列的通项公式是（　　）．

（A）$a_n=4n-1$　　（B）$a_n=8n-5$　　（C）$a_n=4n+3$　　（D）$a_n=8n+5$

6．$b^2=ac$ 是 a，b，c 成等比数列的（　　）．

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7．如果−1，a，b，c，−9 成等比数列，那么（　　）．

（A）$ac=9$，$b=\pm3$　　（B）$ac=-9$，$b=3$

（C）$ac=-9$，$b=-3$　　（D）$ac=9$，$b=-3$

8．设首项为 1，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则（　　）．

（A）$S_n=2a_n-1$　　（B）$S_n=3a_n-2$　　（C）$S_n=4-3a_n$　　（D）$S_n=3-2a_n$

9．如果 a，b，c 成等比数列，那么函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴交点的个数是（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）不能确定

10．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3=6$，$a_2+a_3+a_4=-3$，则 a_1 和公比 q 分别是（　　）．

（A）8，$\frac{1}{2}$　　（B）8，$-\frac{1}{2}$　　（C）−8，$\frac{1}{2}$　　（D）−8，$-\frac{1}{2}$

11．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-12$，$a_5+a_6=-6$，则当 S_n 取得最小值时，n 等于（　　）．

（A）5　　（B）6　　（C）6 或 7　　（D）7

12．已知 m，n 是方程 $x^2-8x+2=0$ 的两个根，则 m，n 的等差中项是（　　）．

（A）−4　　（B）4　　（C）−1　　（D）1

13．等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=100$，且 $d=2$，则 S_{100} 等于（　　）．

（A）50　　（B）100　　（C）150　　（D）300

14．设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $\frac{a_5}{a_3}=\frac{9}{5}$，则 $\frac{S_9}{S_5}=$（　　）．

（A）1　　（B）−1　　（C）$\dfrac{81}{25}$　　（D）$\dfrac{9}{5}$

15．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_m=n$，$a_n=m$，则a_{m+n}的值为（　　）

（A）$m+n$　　（B）0　　（C）$-m-n$　　（D）$\dfrac{m+n}{2}$

16．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=5$，$a_7=13$，则$S_{20}=$（　　）.

（A）340　　（B）360　　（C）380　　（D）400

17．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_6=1$，则$2^{a_2}\cdot 2^{a_3}\cdot 2^{a_4}\cdot 2^{a_5}$的值为（　　）.

（A）16　　（B）8　　（C）4　　（D）2

18．设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q=2$，且$a_2\cdot a_5=4$，则$a_1\cdot a_8$等于（　　）.

（A）6　　（B）8　　（C）16　　（D）32

19．若$\log_2 a$，$\log_2 b$，$\log_2 c$成等差数列，则a，b，c是（　　）.

（A）等差数列　　（B）等比数列

（C）既是等差数列，又是等比数列　　（D）既不是等差数列，又不是等比数列

20．一个多边形的各边成等差数列，且周长为40 cm，若最小边长4 cm，最大边长12 cm，则多边形的边数为（　　）.

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

二、填空题（本大题共5个小题，每小题2分，共10分）

21．若$f(x)=2x-1$，则$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=$__________.

22．已知等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2=75$，$a_3+a_4=15$，则$a_5+a_6=$__________.

23．等比数列$\{a_n\}$中，前n项和$S_n=2^n+a$，则a的值是__________.

24．在各项都是负数的等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2=a_3+2a_4$，则公比$q=$__________.

25．各项都是正数的等比数列$\{a_n\}$，若$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_9+\log_2 a_{10}=4$，则$a_5\cdot a_6=$______.

三、解答题（本大题共4个小题，共30分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（7分）等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=25$，$S_9=S_{17}$，问数列的前多少项的和最大，并求出最大值.

27.（7 分）已知二次函数 $y=f(x)$满足：①$f(x-4)=f(-x)$；②它的顶点在直线 $y=2x-8$ 上；③其图像过点(2，4).

（1）求函数 $y=f(x)$的解析式.

（2）若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=f(n)$，求此数列$\{a_n\}$的通项公式.

28.（8 分）已知$\{a_n\}$为等差数列，且 $a_3=-6$，$a_6=0$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式.

（2）若等比数列$\{b_n\}$满足 $b_1=-8$，$b_2=a_1+a_2+a_3$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和公式.

29.（8 分）某城镇 2017 年底住房面积为 800 万平方米，当地有关部门计划从 2018 年开始，每年新建住房面积是上一年底住房面积的 10%，并且每年拆除一定面积的旧住房.

（1）设每年要拆除的旧住房面积为 x 万平方米，写出 2018 年底该城镇的住房面积（用含 x 的代数式表示）.

（2）如果 2027 年底该城镇的住房面积是 2017 年底的 2 倍，求每年要拆除的旧住房面积（结果精确到 0.01 万平方米）.

人必须有自信，这是成功的秘密。没有天生的信心，只有不断培养的信心。

第五章
平 面 向 量

【复习要求】

向量是一个重要的代数研究对象．向量运算的引入，使数学的运算对象发生了一个重大飞跃：从数、字母、代数式到向量，运算也从一元到多元；向量通过有向线段表示，又可以作为一个几何对象．因此，向量是沟通代数与几何的桥梁．平面向量是重要的基础内容，复习要求如下：

1．理解向量的概念，会正确进行向量的线性运算（加法、减法和数乘运算）．

2．掌握向量的直角坐标及其与点坐标之间的关系，掌握向量的直角坐标运算．

3．掌握两向量垂直、平行的条件．

4．掌握线段的中点公式、两点之间的距离公式．

5．掌握向量夹角的定义，向量内积的定义、性质及其运算．掌握向量内积的直角坐标运算．

6．能利用向量的知识解决相关问题．

【知识框图】

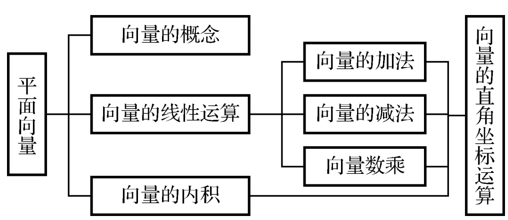


图 5-1

【知识要点】

1．向量及相关概念

向量、向量的表示、向量的长度（模）、零向量、单位向量、相等向量、相反向量、平行（共线）向量、互相垂直的向量、向量的夹角、某向量的单位向量．

2．向量的线性运算

（1）向量的加法

①求两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和

三角形法则：如图 5-2（1）所示，已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．$\overrightarrow{AC}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和．

特别地，当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，结果如图 5-2（2）（同向时）和图 5-2（3）（反向时）所示．

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，还可用平行四边形法则．

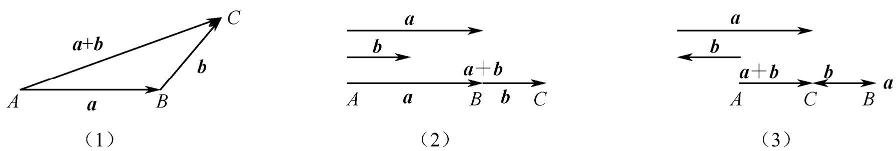


图 5-2

平行四边形法则：已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，当 A、B、D 不共线（即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线）时，以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．$\overrightarrow{AC}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，如图 5-3 所示．

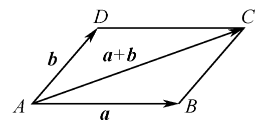


图 5-3

②求 n 个已知向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 之和．

已知 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则 $\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$．$\overrightarrow{OA_n}$ 就是这 n 个已知向量之和．

③运算律

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

（2）向量的减法：已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$．$\overrightarrow{BA}$ 就是两个已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，如图 5-4 所示．

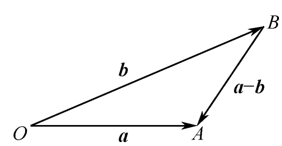


图 5-4

将两个已知向量的始点放在一起，则差向量就是减向量的终点指向被减向量终点的有向线段所表示的向量．也可简记为“始点相同连终点，指向被减”．

减去一个向量等于加上这个向量的相反向量．两个互为相反向量之和等于零向量．

（3）向量的数乘

①定义：实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$．$\lambda\boldsymbol{a}$ 仍是一个向量，其长度是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，

其方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同（$\lambda>0$ 时）或相反（$\lambda<0$ 时）.

②运算律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

③向量平行的充要条件：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda\in\mathbf{R}$）$\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

3．向量的内积

（1）定义

已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，则数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 称作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积，也称作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积或点积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

由定义可以知道，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个实数.

（2）主要性质

①$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$（判断垂直）；

②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$（求长度）；

③$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$（求夹角）.

（3）运算律

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

②$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

③$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

4．向量的直角坐标运算

（1）向量的直角坐标定义：如果 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$（$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向相同的单位向量），我们把(x,y)叫作 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，并简记为 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

（2）点坐标与向量坐标之间的关系

在直角坐标系 xOy 中，如果 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2,y_2)-(x_1,y_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1),$$

特别地，点 P 的坐标是 $(x,y)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=(x,y)$.

（3）向量的直角坐标运算

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1=x_2\text{ 且 }y_1=y_2;$$
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1,y_1)\pm(x_2,y_2)=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2);$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1);$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2;$$
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2};$$
$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0;$$
$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0;$$
$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

（4）距离公式：如果 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

（5）中点公式：如果 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $M(x,y)$ 是线段 AB 的中点，则

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）已知下面四个命题：

①向量就是有向线段； ②方向相反的两个向量叫作相反向量；

③大小相等的两个向量叫作相等的向量； ④零向量没有方向.

其中真命题的个数是（ ）.

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

分析：本题考查了向量的有关概念．特别地，有向线段是具有方向的线段，它是一个图形，而向量是既有大小又有方向的量，它是一个量，向量可以用有向线段来表示，但不能说向量就是有向线段．答案选（A）.

（2）如图 5-5 所示，点 D 是△ABC 的 AB 边的中点，则向量 $\overrightarrow{CD}$ 等于（ ）.

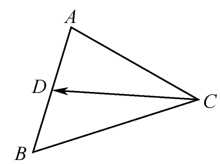


图 5-5

（A）$-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ （B）$-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

（C）$\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ （D）$\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

分析：因为 $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}$，又因为 $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$，

$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，故选（A）.

（3）$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OM}$ 等于（ ）.

（A）$\overrightarrow{BC}$ （B）$\overrightarrow{AB}$ （C）$\overrightarrow{AC}$ （D）$\overrightarrow{AM}$

分析：原式 $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，故选（C）.

（4）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，若 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)$（其中 m，$n\in\mathbf{R}$），则 $m-n$ 的值等于（ ）.

（A）3 （B）10 （C）−3 （D）7

分析：由 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(9,-8)$ 知，$(2m,m)+(n,-2n)=(9,-8)$，所以有 $\begin{cases}2m+n=9\\ m-2n=-8\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}m=2\\ n=5\end{cases}$，故选（C）.

（5）设 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4)$，若表示向量 $4\boldsymbol{a}$，$3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}$ 的有向线段首尾相连恰好构成三角形，则向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标为（ ）.

（A）(1，−1) （B）(−1，1) （C）(−4，6) （D）(4，−6)

分析：由题意知 $4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=-2(1,-3)-3(-2,4)=(4,-6)$，故选（D）.

（6）在平面直角坐标系 xOy 中，若 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\overrightarrow{AB}=(1,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,1)$，

则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ 等于（　　）.

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

分析：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(1,-2)+(2,1)=(3,-1)$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3+1\times(-1)=5$，故选（D）.

（7）已知 $\overrightarrow{AB}=(5,-3)$，$C(-1,3)$，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$，则点 D 的坐标为（　　）.

（A）（11，−3）　　（B）（4，0）　　（C）（9，3）　　（D）（9，−3）

分析：设点 D 的坐标为（x，y），则 $\overrightarrow{CD}=(x+1,\ y-3)=2(5,-3)=(10,-6)$，即 $x+1=10$，且 $y-3=-6$，得 $x=9$ 且 $y=-3$，故选（D）.

（8）已知 $A(-3,4)$，$M(1,-3)$，点 A 关于点 M 的中心对称点的坐标为（　　）.

（A）$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　（B）$\left(-3,\frac{5}{2}\right)$　　（C）$(-5,10)$　　（D）$(5,-10)$

分析：主要考查中点坐标公式．设点 A 关于点 M 的中心对称点的坐标为（x，y），则 $1=\frac{-3+x}{2}$ 且 $-3=\frac{4+y}{2}$，解得 $x=5$ 且 $y=-10$，故选（D）.

（9）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$（　　）.

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$\sqrt{6}$

分析：因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=4$，所以 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，又因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=1+1+4=6$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，故选（D）.

（10）设 $x\in\mathbf{R}$，向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$（　　）.

（A）$\sqrt{5}$　　（B）$\sqrt{10}$　　（C）$2\sqrt{5}$　　（D）10

分析：因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x+1\times(-2)=x-2=0$，解得 $x=2$，于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2+1,\ 1-2)=(3,-1)$，因此 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$，故选（B）.

（11）已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}=(4,2)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为（　　）.

（A）$(2\sqrt{5},\sqrt{5})$　　（B）$(-2\sqrt{5},-\sqrt{5})$

（C）$(2\sqrt{5},\sqrt{5})$或$(-2\sqrt{5},-\sqrt{5})$　　（D）$(\sqrt{5},2\sqrt{5})$或$(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$

分析：因为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}=\lambda(4,2)=(4\lambda,2\lambda)$，$16\lambda^2+4\lambda^2=25$，得 $\lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，又因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向，所以 $\lambda=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{5},\sqrt{5})$，故选（A）.

（12）已知平行四边形 $OABC$，$\overrightarrow{OA}=(4,2)$，$\overrightarrow{OC}=(2,6)$，则 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 夹角的余弦是（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（D）$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

分析：因为四边形 $OABC$ 是平行四边形，根据向量加法的平行四边形法则，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(6,8)$；根据向量减法的三角形法则，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-2,4)$；所以 $\cos\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{(6,8)\cdot(-2,4)}{\sqrt{6^2+8^2}\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，选（C）.

【例 2】填空题

（1）在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=$________.

分析：在正方形 $ABCD$ 中，因为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|=2$.

（2）化简 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})=$_________.

分析：原式 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$.

（3）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-4)$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{b}$ 的坐标是_________.

分析：因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

所以 $\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{(2,-4)}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

点评：此解法主要是利用 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量的定义.

另法：因为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，所以可设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda>0)$，则 $\boldsymbol{b}=\lambda(2,-4)=(2\lambda,-4\lambda)$.

因为 $|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $(2\lambda)^2+(4\lambda)^2=1$，解得 $\lambda=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$，因此 $\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

（4）已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=7$，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$_________.

分析：由已知可得 $\boldsymbol{b}=\dfrac{7}{3}\boldsymbol{a}$，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\left|2\boldsymbol{a}-\dfrac{7}{3}\boldsymbol{a}\right|=\left|\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}\right|=\dfrac{1}{3}|\boldsymbol{a}|=1$.

另法：因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，所以〈$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$〉$=0°$，又因为

$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=36-4\times3\times7\cos0°+49=1$，所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$.

（5）已知 $\alpha=120°$，角 α 的终边与单位圆的交点为 P，线段 OP 的中点为 Q，则向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标是_________.

分析：因为 120° 角的终边与单位圆的交点 P 的坐标是 $(\cos120°，\sin120°)$，也就是 $P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以线段 OP 的中点为 $Q\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 因此 $\overrightarrow{PQ}=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 另解：$\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{OQ}=-\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)=\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

点评：该题虽小但考查的知识点较多，一是特殊角的三角函数值；二是角 α 的终边与单位圆的交点坐标为 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$；三是线段的中点坐标公式；四是求向量的坐标公式. 本题亦可有其他解法，如用 $\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OP}$ 来解.

（6）若 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120°$，则 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=$_________.

分析：
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=3|\boldsymbol{a}|^2-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2\\&=27-32-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=-5-5\times3\times4\cos120°\\&=-5-60\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=25.\end{aligned}$$

（7）已知 $\boldsymbol{a}=(0，-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1，2)$，则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$__________.

分析：因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(0，-1)+(-1，2)=(-1，0)$，所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$.

（8）已知 $\boldsymbol{a}=(-5,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\ \sqrt{3})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 的值是__________.

分析：因为 $\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{(-5)\times(-1)+0\times\sqrt{3}}{\sqrt{(-5)^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\dfrac{5}{5\times 2}=\dfrac{1}{2}$，

又因为 $0°\leqslant\theta\leqslant 180°$，故 $\theta=60°$.

（9）设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直，则 λ 的值为__________.

分析：因为 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\lambda|^2|\boldsymbol{b}|^2=9-25\lambda^2=0$，整理得到 $\lambda^2=\dfrac{9}{25}$，解得 $\lambda=\pm\dfrac{3}{5}$.

【例 3】 一条河的两岸平行，河宽 600 m，一小船从 A 处出发航行到对岸，小船速度为 $\boldsymbol{v}_1$，且 $|\boldsymbol{v}_1|=3\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}$，水流速度为 $\boldsymbol{v}_2$，$|\boldsymbol{v}_2|=3\ \mathrm{m/s}$；当 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ 夹角 θ 多大时，船才能到达正对岸 B 处？小船航行时间是多少？

解：如图 5-6 所示，设小船实际航行的速度为 $\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，即 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_2$，且 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{v}_2$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\dfrac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_2)-\boldsymbol{v}_2^2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}=\dfrac{0-3^2}{3\times 3\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $0°\leqslant\theta\leqslant 180°$，所以 $\theta=135°$，

因为 $|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2|=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2+2\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2+|\boldsymbol{v}_2|^2}$

$$=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2\times 3\sqrt{2}\times 3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+3^2}=3(\mathrm{m/s})$$

所以 $t=\dfrac{600}{3}=200(\mathrm{s})$.

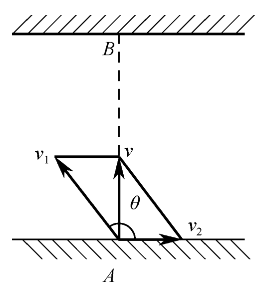


图 5-6

答：当 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 夹角为 $135°$ 时，船能到达正对岸 B 处，时间为 200 s.

【例 4】 已知 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ -3)$，分别求出适合下列条件的 m 的值：

（1）$m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线.（2）$m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直.

解：$m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-m,\ 3m)+(2,\ -3)=(2-m,\ 3m-3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,\ 3)-(2,\ -3)=(-3,\ 6)$，

（1）因为 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $(2-m)\times 6-(3m-3)\times(-3)=0$，解得 $m=-1$.

（2）因为 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(2-m)\times(-3)+(3m-3)\times 6=0$，解得 $m=\dfrac{8}{7}$.

【例 5】 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，若 $|\boldsymbol{a}|=1$，求 $|\boldsymbol{c}|$.

解：由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 得　$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所以 $(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，

由此得到 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，即 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|=1$；

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

因此$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=2$，
所以$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$．

【例 6】已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$120°$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．（2）$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$；（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$．

解：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos 120°=3\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-6$．

（2）$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=2|\boldsymbol{a}|^2-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2$
$=2\times3^2-5\times(-6)-3\times4^2=0$．

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}$
$=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{3^2+2\times(-6)+4^2}=\sqrt{13}$．

【例 7】已知△ABC的三个顶点分别为$A(-1，2)$，$B(3，2)$，$C(0，4)$，求中线AD的长．

分析：首先求BC中点D的坐标，再求$\overrightarrow{AD}$的坐标，然后求$|\overrightarrow{AD}|$．

解：设BC的中点D的坐标为$(x，y)$，

由中点公式得$(x,\ y)=\left(\dfrac{3+0}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$，即$D\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$．

因为$\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{3}{2}+1,\ 3-2\right)=\left(\dfrac{5}{2},\ 1\right)$，所以$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$．

【例 8】已知向量$\overrightarrow{OA}=(k,\ 12)$，$\overrightarrow{OB}=(4,\ 5)$，$\overrightarrow{OC}=(-k,\ 10)$，且$A$，$B$，$C$三点共线，求$k$的值．

解：因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,\ 5)-(k,\ 12)=(4-k,\ -7)$，
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-k,\ 10)-(k,\ 12)=(-2k,\ -2)$，
又因为A，B，C三点共线，所以$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$，
所以$(-2k)\times(-7)=(4-k)\times(-2)$，解方程得$k=-\dfrac{2}{3}$．

【例 9】已知三角形的三个顶点是$A(6,\ 3),B(9,\ 3),C(3,\ 6)$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$和$\angle BAC$的度数．

解：$\overrightarrow{AB}=(9,\ 3)-(6,\ 3)=(3,\ 0)$，
$\overrightarrow{AC}=(3,\ 6)-(6,\ 3)=(-3,\ 3)$，
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3,\ 0)\cdot(-3,\ 3)=-9$．
因为$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+0^2}=3$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

$$\cos\angle BAC=\cos\langle\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-9}{3\times3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又因为$0°<\angle BAC<180°$，所以$\angle BAC=135°$．

【例 10】已知向量$\boldsymbol{a}=(3,\ 4)$，$\boldsymbol{b}=(8,\ 6)$，$\boldsymbol{c}=(2,\ k)$，其中k为常数，如果$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$分别与$\boldsymbol{c}$所成的角相等，求k的值．

解：因为$\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\rangle$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{c}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\rangle$．

因为$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|} = \dfrac{(3,\ 4)\cdot(2,\ k)}{\sqrt{3^2+4^2}\times\sqrt{2^2+k^2}} = \dfrac{6+4k}{5\sqrt{4+k^2}}$,

$$\cos\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|} = \frac{(8,\ 6)\cdot(2,\ k)}{\sqrt{8^2+6^2}\times\sqrt{2^2+k^2}} = \frac{16+6k}{10\sqrt{4+k^2}},$$

所以$\dfrac{6+4k}{5\sqrt{4+k^2}} = \dfrac{16+6k}{10\sqrt{4+k^2}}$，整理得$6+4k=8+3k$，解得$k=2$.

【例 11】在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，求$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|$.

解：如图 5-7 所示，在$\triangle ABC$中，因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=2$，所以$\triangle ABC$为等边三角形，$\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=60°$，

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle = 2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$.

因为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，所以$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$.

因此$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=|-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})^2}$

$=\sqrt{|\boldsymbol{b}|^2-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+4|\boldsymbol{c}|^2}=2\sqrt{3}$.

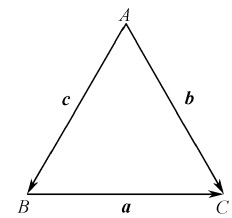


图 5-7

习　题　五

1．选择题

（1）下列命题正确的是（　　）.

（A）若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{b}$

（B）若$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是共线向量，则A，B，C，D四点必在同一条直线上

（C）若$|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{CD}|$，则$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$

（D）若$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda\in\mathbf{R}$），则$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

（2）下列命题正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　　（B）$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

（C）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$　　（D）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

（3）当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$是非零向量且反向时，恒成立的是（　　）.

（A）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$　　（B）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

（C）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$　　（D）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$

（4）下列式子正确的是（　　）.

（A）$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　　（B）$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

（C）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{0}$　　（D）$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

（5）已知点$A(3,\ -3)$，$B(9,\ 6)$，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，则点$M$的坐标为（　　）.

（A）（1，6）　（B）（5，0）　（C）（−1，4）　（D）（4，1）

（6）已知向量 $\boldsymbol{a}=(2，1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$，则$|\boldsymbol{b}|$等于（　　）.

（A）$\sqrt{5}$　（B）$\sqrt{10}$　（C）5　（D）25

（7）已知四边形 $ABCD$，$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{CD}$，则该四边形是（　　）.

（A）梯形　（B）矩形　（C）菱形　（D）正方形

（8）边长为 2 的等边△ABC 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值是（　　）.

（A）4　（B）−4　（C）2　（D）−2

（9）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3，4)$，$|\boldsymbol{b}|=10$，且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 等于（　　）.

（A）$(-6，8)$　（B）$(6，-8)$

（C）$(-6，8)$或$(6，-8)$　（D）$(-12，16)$

（10）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$的值是（　　）.

（A）3　（B）$\sqrt{3}$

（C）$\sqrt{2}$　（D）$2\sqrt{2}$

（11）如图 5-8 所示，在△ABC 中，D 是 $\overrightarrow{BC}$ 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AD}$ 等于（　　）.

（A）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$　（B）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

（C）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$　（D）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

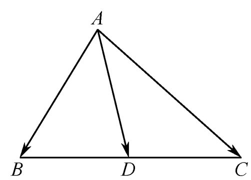


图 5-8

（12）若$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为（　　）.

（A）30°　（B）60°　（C）120°　（D）150°

（13）已知 $\boldsymbol{i}=(1，0)$，$\boldsymbol{j}=(0，1)$，且$(3x-4y)\boldsymbol{i}+(2x-3y)\boldsymbol{j}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$，则 $x-y$ 等于（　　）.

（A）3　（B）−3　（C）0　（D）2

（14）若 $\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{e}$，且$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$，则四边形 $ABCD$ 是（　　）.

（A）平行四边形　（B）菱形

（C）等腰梯形　（D）不等腰梯形

（15）设 $\boldsymbol{a}=(-1，2)$，$\boldsymbol{b}=(2，-2)$，则$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$ 等于（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（16）已知 $\boldsymbol{a}=(1，1)$，$\boldsymbol{b}=(x^2，x+2)$，并且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则实数 x 的值为（　　）.

（A）−1　（B）2　（C）1 或−2　（D）−1 或 2

（17）已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 $A(1，-2)$，$B(3，-1)$，$C(4，3)$，则 $\overrightarrow{BD}$ 的坐标为（　　）.

（A）$(4，-3)$　（B）$(-1，3)$　（C）$(2，-6)$　（D）$(3，-1)$

（18）在直角坐标平面内，已知点 $A(2，2)$，$B(1，3)$，若 $C(7，m)$，且$\angle BAC=90°$，则实数 m 等于（　　）.

（A）6　（B）7　（C）8　（D）9

（19）在四边形 $OABC$ 中，对角线 OB，AC 互相平分，点 $A(1，-2)$，$C(3，1)$，则向量 $\overrightarrow{OB}$

的坐标是（　　）.

（A）(4，−1)　（B）(4，1)　（C）(1，−4)　（D）(1，4)

（20）已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，则〈$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$〉等于（　　）.

（A）30°　（B）60°　（C）120°　（D）150°

（21）若 $\boldsymbol{a}=(m，4)$，$\boldsymbol{b}=(-2，3)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，则 m 的取值范围是（　　）.

（A）$(6，+\infty)$　（B）$[6，+\infty)$　（C）$(-\infty，6)$　（D）$(-\infty，6]$

（22）若 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{5}{2}, \sin\alpha\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\cos\alpha, \dfrac{1}{5}\right)$，且 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则锐角 α 等于（　　）.

（A）30°　（B）45°　（C）60°　（D）90°

（23）已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(-1，\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, x\right)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 x 的值为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）2　（C）$-\dfrac{1}{2}$　（D）−2

（24）已知 $\boldsymbol{a}=(1，\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(3，m)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$，则实数 m 的值为（　　）.

（A）$2\sqrt{3}$　（B）$\sqrt{3}$　（C）0　（D）$-\sqrt{3}$

（25）如图 5-9 所示，在平行四边形 $OABC$ 中，点 $A(1，-2)$，$C(3，1)$，则向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标是（　　）.

（A）(4，−1)

（B）(4，1)

（C）(1，−4)

（D）(1，4)

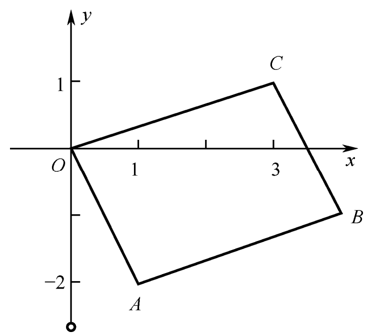


图 5-9

2．填空题

（1）若向量 $\boldsymbol{a}=(3，-4)$，则 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}_0=$__________.

（2）化简 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{OD}=$__________.

（3）已知 $\boldsymbol{a}=(x，4)$，$\boldsymbol{b}=(-1，2x-8)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 x 的值是__________.

（4）已知 A、B、C 三点共线，$A(1，-3)$，$B(-1，1)$，$C(2，m)$，则 m 的值为__________.

（5）已知 $A(2，1)$，$B(2，3)$，若向量 $\boldsymbol{a}=(x^2-3x-4，x^2+1)$与 $\overrightarrow{AB}$ 相等，则实数 x 的值是__________.

（6）已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$，则$|\boldsymbol{b}|=$__________.

（7）已知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{34}$，$\boldsymbol{b}=(4，1)$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标是__________.

（8）若 $\boldsymbol{a}=(1，m)$，$\boldsymbol{b}=(n，2)$，且$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=6$，则点 $P(m，n)$到原点的距离是__________.

（9）已知点 $A(1，-2)$，$B(-5，2)$，点 C 在 y 轴上，且 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$，点 C 的坐标为__________.

（10）已知 $\boldsymbol{a}=(1，\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(1，\cos\theta)$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值是__________.

3．已知 $A(-2，1)$，$B(1，3)$，求：（1）线段 AB 的中点 M 的坐标.（2）线段 AB 的两个三等分点 P 与 Q 的坐标.

4．在平行四边形 $ABCD$ 中，O 是 AC 和 BD 的交点，已知点 $O(3，2)$，$A(-1，6)$，$B(1，3)$，求 C，D 的坐标.

5．已知正三角形 ABC 的边长为 a，D 与 E 分别是 AB 与 AC 的中点，
求：（1）$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$.（2）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.（3）$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}$.

6．已知 $\boldsymbol{a}=(3，-1)$，$\boldsymbol{b}=(1，-2)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle$.

7．已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$，且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-3$，求：
（1）$|\boldsymbol{b}|$.（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

8．已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$\boldsymbol{a}=(3，3)$，$2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1，1)$，求 $\cos\theta$ 的值.

测 试 题 五

（时间为 90 分钟，满分 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分）

1．给出下列命题：

①零向量没有方向；②方向相反的两个向量是相反向量；③$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的必要条件；④零向量与任何向量平行；⑤单位向量都相等.

其中真命题的个数是

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

2．如图 5-10 所示，已知平行四边形 $ABCD$，若 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{CD}$ 可以表示为（　　）.

（A）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　　（B）$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

（C）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　（D）$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$

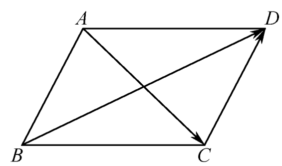


图 5-10

3．给出下列命题：

①$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 表示同一个向量；

②向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$；

③若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

④方向为南偏西 60° 的向量与方向为北偏东 60° 的向量是共线向量.

其中，正确的命题是（　　）.

（A）①②　　（B）③④　　（C）①③　　（D）②④

4．已知 $\boldsymbol{a}=(\sin\alpha，1)$，$\boldsymbol{b}=(2，\cos\alpha)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\tan\alpha$的值为（　　）.

（A）2　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{1}{2}$　　（D）-2

5．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为（　　）.

（A）30°　　（B）60°　　（C）45°　　（D）90°

6．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2^m，n)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2}, 1\right)$，且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$，则实数 m 和 n 的值分别是（　　）.

（A）$m=\log_2 3$，$n=1$　　（B）$m=\log_2 3$，$n=2$

（C）$m=\log_3 2$，$n=1$　　（D）$m=\log_3 2$，$n=2$

7．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1，-3)$，$\boldsymbol{b}=(4，-2)$，若 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则实数 m 的值为（　　）.

（A）-1　　（B）1　　（C）-2　　（D）2

8．设 $\boldsymbol{a}=(5，y)$，$\boldsymbol{b}=(-6，-4)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，则实数 y 的值是（　　）.

（A）-5　　（B）-7　　（C）5　　（D）7

9．已知在△ABC 中，∠A，∠B，∠C 的对边分别为 a，b，c，若 $a=3$，$b=1$，∠$C=30°$，

则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ 等于（　　）.

（A）$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　（B）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　（C）$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　（D）$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

10．若 $\boldsymbol{a}=(-1，2\lambda)$，$\boldsymbol{b}=(3，2)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，则λ的取值范围是（　　）.

（A）$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$　　（B）$\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$　　（C）$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$　　（D）$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

11．已知向量 $\boldsymbol{a}=(m，m+1)$，$\boldsymbol{b}=(2m，-2)$，且 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，则实数 m 的值为（　　）.

（A）0　　（B）-2　　（C）0 或-2　　（D）$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

12．已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1, 2)$，$\overrightarrow{OB}=(3, m)$，若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，则实数 m 等于（　　）.

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

13. 如图 5-11 所示，M 是线段 OB 的中点，若设向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AM}$ 可以表示为（　　）.

（A）$\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　（B）$-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

（C）$\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　（D）$-\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

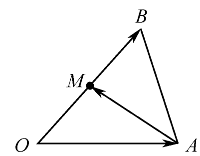


图 5-11

14．已知△ABC 三顶点为 $A(2，-\sqrt{3})$，$B(4，\sqrt{3})$，$C(-1，2\sqrt{3})$，则∠A 等于（　　）.

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）90°

15．若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$等于（　　）.

（A）0　　（B）2　　（C）3　　（D）4

16．已知点 $A(6，y)$关于点 $P(x，1)$的对称点为$(-2，0)$，则 $M(x，y)$到原点的距离是（　　）.

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）3　　（D）$2\sqrt{3}$

17．设向量 $\boldsymbol{a}=(-1，2)$，$\boldsymbol{b}=(2，-1)$，则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 等于（　　）.

（A）(1，1)　　（B）(−4，−4)　　（C）−4　　（D）(−2，−2)

18．四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，则四边形 $ABCD$ 是（　　）.

（A）矩形　　（B）菱形　　（C）正方形　　（D）无法判断

19．已知向量 $\boldsymbol{a}=(3，0)$，$\boldsymbol{b}=(-3，4)$，则〈$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$〉的值是（　　）.

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{4}$　　（C）$\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{\pi}{2}$

20．已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2，2)$，$\boldsymbol{b}=(5，k)$，若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=3$，则实数 k 的值是（　　）.

（A）−2　　（B）2　　（C）−3　　（D）3

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．已知 $O(0, 0)$ 和 $A(6, 3)$ 两点，若点 P 在直线 OA 上，且 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{OP}$，又点 P 是线段 AB 的中点，则点 B 的坐标为__________.

22．已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，若 $\boldsymbol{a}=(x，-2)$，$\boldsymbol{b}=(-8，x)$，则 x 的值是__________.

23．两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，若向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________．

24．已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin 25°，\sin 65°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos 35°，\cos 55°)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值等于________．

25．已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=60°$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 的值是________．

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 40 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（8 分）已知 $\boldsymbol{a}=(2，-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1，3)$，$\boldsymbol{c}=(7，-11)$，且 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}-y\boldsymbol{b}$，求实数 x 与 y 的值．

27．（8 分）已知 $\boldsymbol{a}=(2，1)$，$\boldsymbol{b}=(3，4)$，当 $|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 有最小值时，求实数 t 的值并求出 $|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最小值．

28．（8 分）已知 $\boldsymbol{a}=(3，-4)$，$\boldsymbol{b}=(2，x)$，$\boldsymbol{c}=(2，y)$，并且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，求向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的坐标及向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的夹角．

29．（8 分）已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=60°$．

求：（1）$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$．

（2）$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$ 的值．

30．（8 分）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1，2)$，点 $A(-2，1)$，若 $\overrightarrow{AB}/\!/\boldsymbol{a}$，且 $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{5}$，求点 B 的坐标．

行动是治愈恐惧的良药，而犹豫、拖延将不断滋养恐惧。

第六章 三　　角

【复习要求】

三角函数是初等函数的一种，所以研究的方法与研究其他初等函数的方法相同．一般来说就是定义、图像、性质、应用等，但是它又有自己独特的一面，以角度为自变量，具有周期性等，三角函数中公式比较多，但都可以看成是对定义的引申，复习时要紧紧围绕三角函数的定义进行．对于三角部分的复习，我们的建议如下：

1．理解任意角的概念，理解终边相同的角的集合．

2．理解弧度的意义，掌握弧度和角度的互化．

3．理解任意角三角函数的定义，掌握三角函数在各象限的符号，以及角的终边与单位圆交点的坐标．

4．掌握同角三角函数间的基本关系式．

5．会用诱导公式化简三角函数式．

6．掌握正弦函数、余弦函数的图像和性质．

7．掌握正弦型函数的图像和性质，会用“五点法”画正弦型函数的简图．

8．会用计算器求三角函数值，会由三角函数（正弦和余弦）值求出指定范围内的角．

9．掌握和角公式与倍角公式，会用它们进行计算、化简和证明．

10．会求以 $\sin x$ 或 $\cos x$ 为自变量的函数的最值．

11．掌握正弦定理和余弦定理，会根据已知条件求三角形的边、角及面积．

12．能综合运用三角知识解决实际问题．

【知识框图】

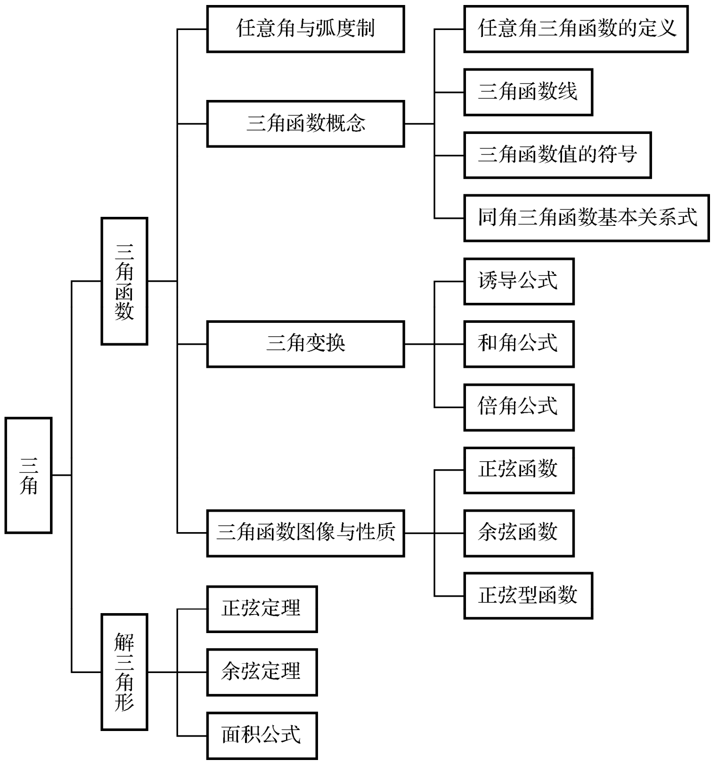


图 6-1

【知识要点】

1．角的概念的推广

正角、负角、零角、终边相同的角、象限角．

2．弧度制

（1）1 弧度的角：等于半径长的圆弧所对的圆心角．

（2）圆心角的弧度数：$\alpha=\dfrac{l}{r}$．

（3）弧度和角度的互化公式：

$$\pi \text{ rad}=180^\circ,$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ rad}\approx 0.017\,45\text{ rad},$$

$$1\text{ rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.3^\circ=57^\circ 18'.$$

（4）特殊角的弧度与角度之间的互化．

3．任意角的三角函数

（1）三角函数的定义：设点 $P(x，y)$是角 α 的终边上任意一点，它和原点 O 的距离为 $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$ （$r>0$），则

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}，\cos\alpha=\frac{x}{r}，\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

（2）特殊角的三角函数值如表 6-1 所示．

表 6-1 特殊角的三角函数值

角 α	度	0°	90°	180°	270°	360°	30°	45°	60°	120°	135°	150°
	弧度	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin\alpha$		0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$		1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$		0	不存在	0	不存在	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

（3）角α的终边与以原点为圆心的单位圆的交点坐标是 $P(\cos\alpha，\sin\alpha)$．

（4）三角函数在各象限的符号情况如图 6-2 所示．

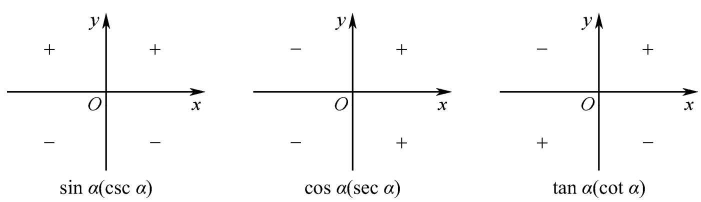


图 6-2

4．诱导公式

公式一：角α与“$\alpha+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$”之间的三角函数关系．

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha；\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha；\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha.$$

公式二：角α与“$-\alpha$”之间的三角函数关系．

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha；\cos(-\alpha)=\cos\alpha；\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.$$

公式三：角α与“$\pi+\alpha$”之间的三角函数关系．

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha；\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha；\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.$$

公式四：角α与“$\pi-\alpha$”之间的三角函数关系．

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha；\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha；\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.$$

公式五：角α与“$\frac{\pi}{2}+\alpha$”之间的三角函数关系．

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha；\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

5．同角三角函数间的基本关系式：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1，\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

6．正弦函数 $y=\sin x$ （$x\in\mathbf{R}$）的图像和性质

（1）图像如图 6-3 所示：

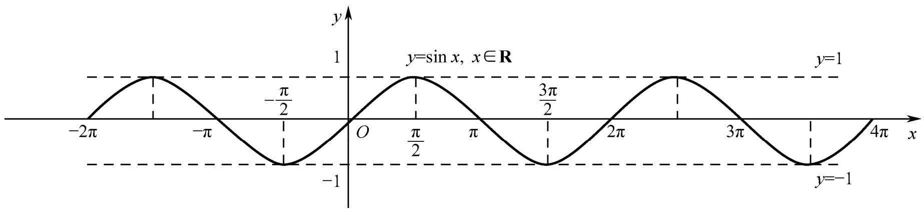


图 6-3

（2）性质

①定义域：**R**.

②值域：[−1，1].

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{max}=1$；当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{min}=-1$.

③周期性：$T=2\pi$.

④奇偶性：正弦函数是奇函数，它的图像关于坐标原点对称.

⑤单调性：在每一个闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$上是增函数；

在每一个闭区间 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$上是减函数.

7．正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (其中 A、ω、φ都是常数，$A>0$，$\omega>0$)

(1) 图像：正弦型函数的图像可由正弦函数 $y=\sin x$ ($x\in\mathbf{R}$)的图像变换得到，也可利用“五点法”作图得到.

（2）性质

①定义域：**R**.

②值域：$[-A，A]$，$y_{max}=A$，$y_{min}=-A$.

③周期：$T=\frac{2\pi}{\omega}$.

8．余弦函数 $y=\cos x$（$x\in\mathbf{R}$）的图像和性质

（1）图像如图 6-4 所示：

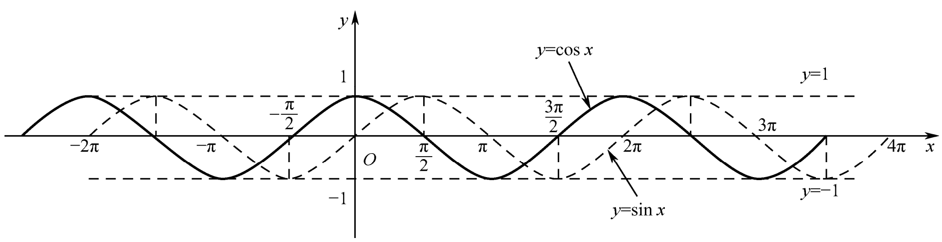


图 6-4

（2）性质

①定义域：$\mathbf{R}$.

②值域：$[-1，1]$.

当 $x=2k\pi$ （$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\max}=1$；当 $x=(2k+1)\pi$ （$k\in\mathbf{Z}$）时，$y_{\min}=-1$.

③周期性：$T=2\pi$.

④奇偶性：余弦函数是偶函数，它的图像关于 y 轴对称.

⑤单调性：在每一个闭区间 $\left[(2k-1)\pi,\ 2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上是增函数；

在每一个闭区间 $\left[2k\pi,\ (2k+1)\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）上是减函数.

9．函数

$y=a\sin\omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\theta)$

$$(\text{其中}\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}，\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

$$y_{\max}=\sqrt{a^2+b^2}，y_{\min}=-\sqrt{a^2+b^2}，T=\frac{2\pi}{\omega}\ (\text{设}\omega>0).$$

10．和角公式

（1）$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

（2）$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

（3）$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

11．倍角公式

（1）$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

（2）$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

$=1-2\sin^2\alpha$.

（3）$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

12．余弦定理：三角形任何一边长的平方等于其他两边长的平方和减去这两边的长与它们的夹角的余弦乘积的 2 倍.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

13．正弦定理：在任何一个三角形中，各边和它所对的角的正弦的比值相等.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

14．三角形的面积：任何一个三角形的面积，都等于任意两边及其夹角正弦乘积的一半.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

15．掌握计算器在三角学中的运用方法．主要包括：

（1）会利用计算器求任意角的三角函数值.

（2）会利用计算器求指定范围内的角.

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）若角α的终边经过点$(m，-m)$，且 $m<0$，则 $\sin\alpha$ 的值是（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）-1

分析：因为 $x=m$，$y=-m$，且 $m<0$，则 $r=\sqrt{m^2+(-m)^2}=\sqrt{2m^2}=\sqrt{2}\,|m|=-\sqrt{2}m$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-m}{-\sqrt{2}m}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选（A）.

点评：三角函数的定义中，$r>0$．解此题时，要根据 m 的符号去掉绝对值符号，注意已知条件 $m<0$，避免出现“$r=\sqrt{m^2+(-m)^2}=\sqrt{2m^2}=\sqrt{2}\,|m|=\sqrt{2}m$”的错误.

（2）已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，那么 $\cos\alpha$ 的值为（　　）.

（A）$\pm\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

分析：由诱导公式 $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$.

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选（D）.

（3）若点 $P(\sin\alpha，\tan\alpha)$在第三象限内，则角α是（　　）.

（A）第一象限角　（B）第二象限角　　（C）第三象限角　　（D）第四象限角

分析：因为点 $P(\sin\alpha，\tan\alpha)$在第三象限内，所以 $\sin\alpha<0$，$\tan\alpha<0$，角α应为第四象限角，故选（D）.

（4）已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（　　）.

（A）$-\dfrac{7}{9}$　　（B）$\dfrac{2}{9}$　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　（D）$-\dfrac{2}{3}$

分析：因为$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha=\dfrac{16}{9}$，所以 $\sin 2\alpha=-\dfrac{7}{9}$.

故选（A）.

（5）已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sin 67°，\cos 67°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos 53°，\cos 37°)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的值等于（　　）.

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

分析：因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin 67°\cos 53°+\cos 67°\cos 37°$，由诱导公式知，$\cos 37°=\sin 53°$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin 67°\cos 53°+\cos 67°\sin 53°=\sin(67°+53°)=\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故选（D）.

（6）函数 $y=3\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{5}\right)$，$\omega>0$，其最小正周期是$\dfrac{\pi}{3}$，则实数$\omega$的值是（　　）.

（A）3　　（B）6　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

分析：由正弦型函数的性质可知，$\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{3}$，解得$\omega=6$，故选（B）.

（7）已知点$A(\cos\alpha，\sin\alpha)$和点$B(1，1)$，则$|\overrightarrow{AB}|$的最小值是（　　）.

（A）$\sqrt{2}-1$　　（B）6　　（C）$\sqrt{2}+1$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

分析：由两点间的距离公式得：

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(\cos\alpha-1)^2+(\sin\alpha-1)^2=3-2\sin\alpha-2\cos\alpha=3-2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),$$

所以$|\overrightarrow{AB}|$的最小值是$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$，故选（A）.

（8）函数$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的单调递增区间是（　　）.

（A）$\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$　　（B）$\left[-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

（C）$\left[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$　　（D）$\left[-\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

分析：若使该函数单调递增，只需$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以$-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故选（C）.

另亦可作出该函数的图像，便可知应选（C）.

（9）函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$x\in\mathbf{R}$)的部分图像如图6-5所示，则函数的表达式为（　　）.

（A）$y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　（B）$y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

（C）$y=4\sin\left(\dfrac{1}{8}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　（D）$y=4\sin\left(\dfrac{1}{8}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

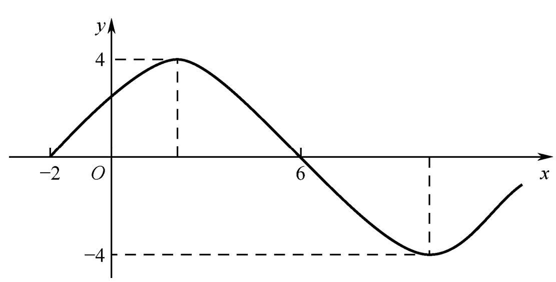


图6-5

解法一：由图6-5可知，函数的最大值是4，最小值是−4，所以$A=4$；

由图可知，$\dfrac{T}{2}=|6-(-2)|=8$，$T=16$，

即$\dfrac{2\pi}{\omega}=16$，得$\omega=\dfrac{\pi}{8}$.

于是函数的表达式为

$y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\varphi\right)$.

因为函数的图像经过点(−2，0)，所以 $4\sin\left[\dfrac{\pi}{8}\times(-2)+\varphi\right]=0$，即 $\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

由此得到 $\varphi-\dfrac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，也就是 $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，而当 $k=0$ 时，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

因此，所求函数的表达式为 $y=4\sin\left(\dfrac{\pi}{8}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. 故选（A）.

解法二：因为图像经过点(−2，0)，将(−2，0)代入四个选项验证，可知只有（A）成立，故选（A）.

（10）已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，则下列命题正确的是（　　）.

（A）函数 $y=f(x)\cdot g(x)$ 的最小正周期为 2π

（B）函数 $y=f(x)\cdot g(x)$ 的最大值为 1

（C）将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后得到 $g(x)$ 的图像

（D）将函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后得到 $g(x)$ 的图像

分析：因为 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$，$g(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$，

所以 $y=f(x)\cdot g(x)=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，所以它的最大值是 $\dfrac{1}{2}$，周期是 π，将 $f(x)$ 的图像向右平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位后得到 $g(x)$ 的图像，故选（D）.

（11）在△ABC 中，若 $a:b:c=2\sqrt{2}:\sqrt{2}:2$，则该三角形是（　　）.

（A）直角三角形　（B）锐角三角形　　（C）钝角三角形　　（D）等边三角形

分析：因为 $a:b:c=2\sqrt{2}:\sqrt{2}:2$，所以可设 $a=2\sqrt{2}k$，$b=\sqrt{2}k$，$c=2k$，其中 $k>0$，并由此可知 a 为最大边，$\angle A$ 为最大角．由余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{2}k)^2+(2k)^2-(2\sqrt{2}k)^2}{2\cdot\sqrt{2}k\cdot 2k}=-\frac{\sqrt{2}}{4}<0$$

所以 $\angle A$ 必为钝角，△ABC 必为钝角三角形，故选（C）.

点评：已知三角形的三边判断其形状时，先求出最大边所对的角的余弦值，然后根据余弦值是正数、负数还是零，由此判定最大角是锐角、钝角还是直角，从而断定三角形的形状.

（12）在△ABC 中，若 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$，则该三角形是（　　）.

（A）锐角三角形　（B）直角三角形　　（C）钝角三角形　　（D）等边三角形

分析：设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$（显然 $k>0$），则 $\sin A=\dfrac{a}{k}$，$\sin B=\dfrac{b}{k}$，$\sin C=\dfrac{c}{k}$.

由 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，可以得到$\left(\frac{a}{k}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=\left(\frac{c}{k}\right)^2$，化简得 $a^2+b^2=c^2$. 所以$\triangle ABC$ 是直角三角形，故选（B）.

点评：在利用正弦定理进行计算、化简与证明时，通常可设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$（显然 $k>0$），此时每个角的正弦值都可用这个角所对的边长表示，即 $\sin A=\frac{a}{k}$，$\sin B=\frac{b}{k}$，$\sin C=\frac{c}{k}$；同时，也可将每条边长用它所对的角的正弦值表示，即 $a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$.

（13）在$\triangle ABC$ 中，若 $b=2$，$c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\angle B=60°$，则$\angle C$ 等于（　　）.

（A）135°　　（B）45°　　（C）45°或 135°　　（D）90°

分析：因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\sin 60°}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由此得到$\angle C=45°$或$\angle C=135°$，而 $135°+60°>180°$，因此只有$\angle C=45°$，故选（B）.

（14）在$\triangle ABC$ 中，$b=2\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$，$\angle B=45°$，则$\angle C$ 的度数为（　　）.

（A）30°　　（B）60°　　（C）120°　　（D）60°或 120°

分析：因为$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sin 45°}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由此得到$\angle C=60°$或$\angle C=120°$，而 $120°+45°<180°$，此题有两个解. 故选（D）.

点评：已知两边和其中一边的对角解三角形时，要注意解的情况.

（15）在平面直角坐标系 xOy 中，角α与角β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 y 轴对称，若 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$，则 $\cos 2\beta$的值为（　　）.

（A）$\frac{1}{8}$　　（B）$\frac{7}{8}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{4}$

分析：因为角α与角β的终边关于 y 轴对称，所以 $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{4}$，所以 $\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=\frac{7}{8}$. 故选（B）.

（16）三角形的两边长分别是 5 和 3，它们夹角的余弦是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根，则三角形的另一边长为（　　）.

（A）52　　（B）$2\sqrt{13}$　　（C）16　　（D）4

分析：设该夹角为α，方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根是 $x=-\frac{3}{5}$或 $x=2$，即 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$或 $\cos\alpha=2$（舍去），然后由余弦定理求出另一边长为 $2\sqrt{13}$，故选（B）.

（17）设$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，若 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，且 $a>b$，则$\angle B$ 等于（　　）.

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

分析：设 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$（显然 $k>0$），则 $a=k\sin A$，$b=k\sin B$，$c=k\sin C$.

因为 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$，

所以 $k\sin A\sin B\cos C+k\sin C\sin B\cos A=\frac{1}{2}k\sin B$，

因为 $k\neq 0$，$\sin B\neq 0$，

所以 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{1}{2}$，

即 $\sin(A+C)=\frac{1}{2}$，

又因为 $\sin(A+C)=\sin(180^\circ-B)=\sin B$，故 $\sin B=\frac{1}{2}$.

因为 $a>b$，所以$\angle B$ 必为锐角，

所以$\angle B=\frac{\pi}{6}$，故选（A）.

（18）在$\triangle ABC$ 中，若 $2\sin A\cos B=\sin C$，则$\triangle ABC$ 的形状一定是（　　）.

（A）等腰三角形　（B）直角三角形　　（C）等腰直角三角形　（D）等边三角形

分析：因为 $\sin C=\sin(\pi-C)=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

因为 $2\sin A\cos B=\sin C$，

所以 $2\sin A\cos B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

由此得 $\sin(A-B)=0$，而 A，B 是三角形的内角，故有 $A=B$，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

【例 2】填空题

（1）已知α是第二象限角，$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，则 $\sin\alpha$的值是__________.

分析：解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$$

得 $\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$. 因为$\alpha$是第二象限角，所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

（2）已知 $\sin\alpha$是方程 $5x^2+6x-8=0$ 的根，α是第二象限角，则

$\frac{\cos(4\pi-\alpha)\cos(\alpha+3\pi)\tan^3\alpha}{\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)}=$ ____________.

分析：方程 $5x^2+6x-8=0$ 的根是 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 或 $\sin\alpha=-2$（舍去）.

因为α是第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$.

所以原式$=\dfrac{\cos\alpha(-\cos\alpha)\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^3}{\sin\alpha(-\sin\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.

（3）已知 $2\sin x+\sqrt{3}=0$，$x\in[0,2\pi]$，则 x 的值为__________.

分析：因为 $2\sin x+\sqrt{3}=0$，

所以 $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 x 是第三或第四象限角.

我们知道 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由三角诱导公式知

$$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

因此，符合条件的角 x 有两个，它们是

$$x=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}\text{ 或 }x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}.$$

说明：如果 x 是任意实数，则所求的角 x 的取值集合是

$\left\{x\middle|x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\text{或}\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

点评：已知三角函数值求角的一般步骤：

①判断角所在的象限；

②求“锐角”（若非特殊角则利用计算器求）；

③由所求的锐角，再据诱导公式或三角函数的性质（或单位圆）求出“代表角”；

④利用周期性求出所有适合条件的角.

（4）在△ABC 中，$a=\sqrt{3}$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$，则△ABC 的面积为__________.

分析：由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$，则 $\sin A=\dfrac{\sqrt{55}}{10}$，从而 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{55}}{10}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

（5）已知角 α 终边落在直线 $y=-3x$ 上，则 $\cos(\pi+2\alpha)$的值是__________.

分析：因为角 α 终边落在直线 $y=-3x$ 上，在角 α 终边上取点 P，设其横坐标为 m（$m\neq0$），则其纵坐标为$-3m$，所以 $r=\sqrt{10}\,|m|$，所以 $\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\cos(\pi+2\alpha)=-\cos2\alpha=1-2\cos^2\alpha=\dfrac{4}{5}$.

【例 3】已知 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$，求 $\cos2x$ 的值.

解法一：由 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ 得 $\dfrac{\tan x+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\dfrac{\pi}{4}}=-\dfrac{1}{2}$，解得 $\tan x=-3$.

解方程组$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\cos x}=-3\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$　得 $\cos^2 x=\dfrac{1}{10}$.

所以 $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\dfrac{1}{10}-1=-\dfrac{4}{5}$.

解法二：在得到 $\tan x=-3$ 后，

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{4}{5}.$$

【例 4】已知点 $P(3,4)$在角θ的终边上，将有向线段$\overrightarrow{OP}$绕坐标原点 O 旋转“$\theta+30°$”到$\overrightarrow{OP'}$的位置，求点 P'的坐标(x', y').

解：因为 $P(3, 4)$在角θ 的终边上，所以 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

由三角函数的定义得　$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，

由倍角公式得　$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=-\dfrac{7}{25}$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{24}{25}$，

由题意得　$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OP'}|=5$，由三角函数定义可知

$$x'=5\cos(2\theta+30°)=5(\cos 2\theta\cos 30°-\sin 2\theta\sin 30°)=-\frac{7\sqrt{3}+24}{10},$$

$$y'=5\sin(2\theta+30°)=5(\sin 2\theta\cos 30°+\cos 2\theta\sin 30°)=\frac{24\sqrt{3}-7}{10},$$

所以点 P'的坐标为$\left(-\dfrac{7\sqrt{3}+24}{10},\ \dfrac{24\sqrt{3}-7}{10}\right)$.

【例 5】已知 A，B，C 是△ABC 的三个内角，向量 $\boldsymbol{m}=(-1, \sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=(\cos A, \sin A)$，且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$.

（1）求角 A.

（2）若 $\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$，求 $\tan C$.

解：（1）因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$，所以$(-1)\cos A+\sqrt{3}\sin A=1$，即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

$2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\dfrac{1}{2}\cos A\right)=1$，所以 $\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，$-\dfrac{\pi}{6}<A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由 $\dfrac{1+\sin 2B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$ 得

$$\sin^2 B-\sin B\cos B-2\cos^2 B=0,$$

$$(\sin B-2\cos B)(\sin B+\cos B)=0,$$

$\sin B=2\cos B$ 或 $\sin B=-\cos B$（不合题意，舍去）.

当 $\sin B=2\cos B$ 时，$\tan B=2$.

因此 $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=\tan[-(A+B)]=-\tan(A+B)$

$$=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\frac{8+5\sqrt{3}}{11}.$$

【例 6】已知 $y=\cos 2x+\sin^2 x-\cos x$.

（1）求 y 的最大值和最小值.

（2）在 $[0,\pi]$ 内，写出当 y 取得最大值和最小值时 x 的值.

解：（1）$y=\cos 2x+\sin^2 x-\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x-\cos x=\cos^2 x-\cos x$

$$=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

当 $\cos x=-1$ 时，$y_{\max}=\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=2$；

当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$.

（2）由（1）知，当 $\cos x=-1$ 时，$y_{\max}=2$，而在区间[0，π]内，使 $\cos x=-1$ 的角只有 $x=\pi$；当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{4}$，而在区间[0，π]内，使 $\cos x=\frac{1}{2}$ 的角只有 $x=\frac{\pi}{3}$. 由此可知，在区间[0，π]内，使 y 取得最大值和最小值的 x 的值分别是 $x=\pi$ 和 $x=\frac{\pi}{3}$.

点评：①求此类函数的最值时，一要统一角的大小，二要统一函数名称；
②要掌握（在给定区间内或在定义域内）由三角函数值求角的方法.

【例 7】已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）求函数的最大值、最小值和周期.

（2）求使函数取得最大值和最小值的 x 的集合.

（3）用“五点法”做出函数在长度为一个周期的闭区间上的简图.

（4）写出函数的单调区间.

解：（1）函数的最大值是 2，最小值是−2，周期 $T=\pi$.

（2）令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最大值的 x 的集合是 $\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），因此使函数取得最小值的 x 的集合是 $\left\{x\middle|x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（3）列表如表 6-2 所示.

表 6-2

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	2	0	−2	0

描点、作图．如图 6-6 所示，得到函数在一个周期上的图像．

（4）函数的单调递增区间是 $\left[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\ \dfrac{\pi}{12}+k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$，单调递减区间是 $\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\ \dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$．

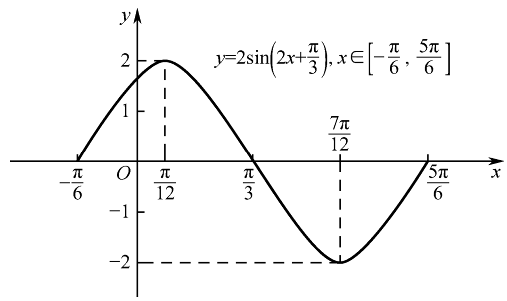


图 6-6

点评：①解题的关键是把形如 $y=a\sin x+b\cos x$ 的函数化成正弦型函数．如果只求函数的最大值、最小值和周期，可不必求出辅助角 θ；如果要求函数取最大值或最小值时 x 的取值集合或求函数的单调区间，则必须求出辅助角 θ，此时的角 θ 一般都是特殊角．

②用“五点法”作图像时正确列表是关键，要掌握列表的方法与技巧．

【例 8】已知函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(m，\cos 2x)$，$\boldsymbol{b}=(1+\sin 2x，1)$，$x\in\mathbf{R}$，且函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4}，2\right)$．

（1）求实数 m 的值．

（2）求函数 $f(x)$ 的最小值及此时 x 的取值集合．

解：（1）$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(m，\cos 2x)\cdot(1+\sin 2x，1)=m(1+\sin 2x)+\cos 2x$

$=m+m\sin 2x+\cos 2x$．

因为函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $\left(\dfrac{\pi}{4}，2\right)$，即 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$，

所以 $m+m\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}=2$，解得 $m=1$．

（2）因为 $f(x)=1+\sin 2x+\cos 2x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

因此，函数 $f(x)$ 的最小值为：$1-\sqrt{2}$．

当函数 $f(x)$ 取最小值时，$2x+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．

解得 $x=-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．因此，使函数 $f(x)$ 取最小值时 x 的取值集合是

$$\left\{x \middle| x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

【例 9】已知△ABC 的顶点坐标分别为 $A(3，4)$，$B(0，0)$，$C(m，0)$.

（1）若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=10$，求 $\sin A$ 的值.

（2）若∠A 是钝角，求实数 m 的取值范围.

解：（1）因为 $\overrightarrow{AB}=(-3，-4)$，$\overrightarrow{AC}=(m-3，-4)$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-3(m-3)+16=-3m+25$.

又因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=10$，所以 $-3m+25=10$，解得 $m=5$.

此时 $\overrightarrow{AB}=(-3，-4)$，$\overrightarrow{AC}=(2，-4)$，$\overrightarrow{BC}=(5，0)$.

所以 $|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{BC}|=5$.

所以 $\cos A=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{5^2+(2\sqrt{5})^2-5^2}{2\times5\times2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

又 $0°<∠A<180°$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

点评：也可应用向量的内积公式求出 $\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）如图 6-7 所示，因为点 $C(m，0)$在 x 轴上，所以点 C 可取 x 轴上除点 B 外的所有点，都可构成△ABC；又因为 x 轴上的点 $P\left(\dfrac{25}{3}，0\right)$可使∠$BAP=90°$，所以点 C 一定是 x 轴上位于点 P 右侧的所有点.

因此，当∠A 是钝角时，

实数 m 的取值范围是 $\left\{m \middle| m>\dfrac{25}{3}\right\}$.

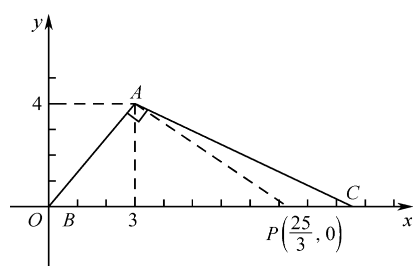


图 6-7

【例 10】在△ABC 中，$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，∠$B=2$∠A.

（1）求 $\cos B$ 的值.（2）求 c 的值.

解：（1）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 得 $\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin 2A}$，

也就是 $\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2\sin A\cos A}$，解得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\cos B=\cos 2A=2\cos^2A-1=2\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-1=\dfrac{1}{3}$.

（2）因为 $\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$0<A<\pi$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $\cos B=\frac{1}{3}$，$0<B<\pi$，

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

由诱导公式及和角公式得到

$$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{3\times\frac{5\sqrt{3}}{9}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=5.$$

【例 11】在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b=3$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$，$S_{\triangle ABC}=3$，求角 A 和边 a.

解：因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-6$，所以 $b\cdot c\cdot\cos A=-6$，即 $c\cdot\cos A=-2$；

又因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A=3$，所以 $c\cdot\sin A=2$，

所以 $\tan A=\frac{c\sin A}{c\cos A}=-1$，因为 A 为三角形的内角，所以 $A=135°$；

由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A=3$，所以 $\frac{1}{2}\times 3c\times\sin 135°=3$，得 $c=2\sqrt{2}$，

因为 $a^2=b^2+c^2-2b\cdot c\cdot\cos A=9+8-2\times3\times2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=29$，

所以 $a=\sqrt{29}$.

【例 12】如图 6-8 所示，位于 A 处的甲船获悉，在其正东方向相距 20 n mile 的 B 处有一艘渔船遇险等待营救．甲船立即前往救援，同时把消息告知位于甲船的南偏西 30°，相距 10 n mile C 处的乙船，试问乙船应该沿着北偏东多少度的方向前往 B 处救援?

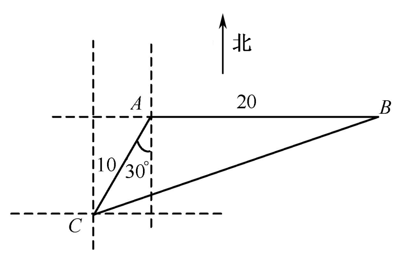


图 6-8

解：在△ABC 中，$AB=20$，$AC=10$，

$\angle CAB=120°$．由余弦定理得

$BC^2=20^2+10^2-2\times20\times10\times\cos 120°=700$.

于是 $BC=10\sqrt{7}$（n mile）.

由正弦定理得 $\frac{20}{\sin\angle ACB}=\frac{10\sqrt{7}}{\sin 120°}$，

解得 $\sin\angle ACB=\sqrt{\frac{3}{7}}$，又因为 $0°<\angle ACB<90°$，所以 $\angle ACB\approx 40.89°$，$40.89°+30°=70.89°$.

答：乙船应该沿着北偏东 70.89° 的方向前往 B 处救援.

习 题 六

1．选择题

（1）下列各角与 300° 终边相同的角是（　　）.

（A）$-300°$　（B）$30°$　（C）$-60°$　（D）$120°$

（2）如果 α 是第一象限角，则下列各角中，一定为第四象限角的是（　　）.

（A）$90°-\alpha$　（B）$90°+\alpha$　（C）$180°+\alpha$　（D）$360°-\alpha$

（3）已知角 α 的终边经过点 $P(2，n)$，且 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，则 $n=$（　　）.

（A）$-\frac{3}{8}$　（B）$-\frac{8}{3}$　（C）$\pm\frac{8}{3}$　（D）$\pm\frac{3}{8}$

（4）设角 α 的终边与单位圆相交于点 $P\left(\frac{3}{5}，-\frac{4}{5}\right)$，则 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值是（　　）.

（A）$\frac{1}{5}$　（B）$-\frac{1}{5}$　（C）$-\frac{7}{5}$　（D）$\frac{7}{5}$

（5）设 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$，且 α 是第二象限角，则 $\sin(\pi-\alpha)$ 等于（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{6}}{6}$　（B）$-\frac{\sqrt{6}}{6}$　（C）$-\frac{\sqrt{30}}{6}$　（D）$\frac{\sqrt{30}}{6}$

（6）顶点在坐标原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边在 y 轴上的角的集合是（　　）.

（A）$\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$　（B）$\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{2}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$

（C）$\{x\,|\,x=-\pi+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$　（D）$\{x\,|\,x=-\pi+k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$

（7）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值是（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{3}}{4}$　（B）$-\frac{\sqrt{3}}{4}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（D）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

（8）已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}，\pi\right]$，则 $\cos\alpha$ 等于（　　）.

（A）$-\dfrac{3}{5}$　　（B）$\pm\dfrac{4}{5}$　　（C）$-\dfrac{4}{5}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

（9）已知 $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，则 $\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$等于（　　）.

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$-\dfrac{1}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{9}$　　（D）$-\dfrac{1}{9}$

（10）设角 A，角 B，角 C 为△ABC 的三个内角，给出下列四个关系式：

①$\cos(A+B)=\cos C$　　②$\cos\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}$

③$\sin(A+B)=\sin C$　　④$\sin(2A+B+C)=\sin A$

其中成立的是（　　）.

（A）①②　　（B）③④　　（C）①④　　（D）②③

（11）若 $y=3\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　$(\omega>0)$的最小正周期是$\dfrac{\pi}{2}$，则实数ω的值是（　　）.

（A）4　　（B）2　　（C）$\dfrac{1}{4}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

（12）函数 $y=3\sin\dfrac{x}{3}+4\cos\dfrac{x}{3}$ 的最大值和周期分别是（　　）.

（A）5，2π　　（B）4，π　　（C）-5，$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）5，6π

（13）函数 $y=-5\sin\dfrac{x}{3}$ 的最大值及取最大值时 x 的集合分别为（　　）.

（A）5，$\left\{x\middle|x=\dfrac{3\pi}{2}+6k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$　　（B）-5，$\left\{x\middle|x=\dfrac{3\pi}{2}+6k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$

（C）5，$\left\{x\middle|x=-\dfrac{3\pi}{2}+6k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$　　（D）-5，$\left\{x\middle|x=-\dfrac{3\pi}{2}+6k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$

（14）下列周期不为π的函数是（　　）.

（A）$y=|\sin x|$　　（B）$y=\sin 2x+\cos 2x$

（C）$y=\cos x$　　（D）$y=\sin x\cos x$

（15）若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$　$(x\in\mathbf{R}，\omega>0，|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$的最小正周期是$\pi$，且 $f(0)=\sqrt{3}$，则ω和φ分别是（　　）.

（A）$\omega=\dfrac{1}{2}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\omega=\dfrac{1}{2}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

（C）$\omega=2$，$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$　　（D）$\omega=2$，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

（16）“角 α 是第四象限角”是“$\sin 2\alpha<0$”的（　　）.

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（17）函数 $f(x)=\cos x-\sin x$ 是（　　）.

（A）偶函数　　（B）奇函数

（C）既不是奇函数也不是偶函数　　（D）既是奇函数又是偶函数

（18）函数 $y=2\cos^2 x+8\sin x-9$ 的最大值是（　　）.

（A）-1　　（B）1　　（C）2　　（D）-2

（19）下列函数中，图像的一部分如图 6-9 所示的是（　　）.

（A）$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

（B）$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

（C）$y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

（D）$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

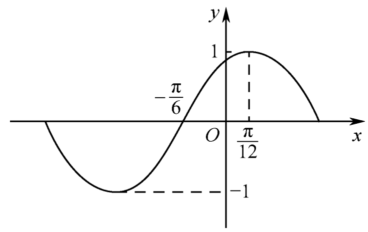


图 6-9

（20）为了得到函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图像，只需把函数 $y=\sin x$ 的图像（　　）.

（A）向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个长度单位　　（B）向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个长度单位

（C）向上平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个长度单位　　（D）向下平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个长度单位

（21）如果 $2\cos 2\alpha+1=0$，且 $\alpha\in[0,\ \pi]$，则 α 等于（　　）.

（A）$\dfrac{5\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{4\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{5\pi}{6}$ 或 $\dfrac{7\pi}{6}$　　（D）$\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

（22）在△ABC 中，若 $a^2-b^2=bc+c^2$，那么∠A 的值是（　　）.

（A）60°　　（B）30°　　（C）120°　　（D）150°

（23）在△ABC 中，如果 $a:b:c=3:8:7$，那么（　　）.

（A）$\cos B<\cos A<\cos C$　　（B）$\cos A<\cos B<\cos C$

（C）$\cos C<\cos B<\cos A$　　（D）$\cos B<\cos C<\cos A$

（24）在△ABC 中，已知 $AB=5$，$AC=3$，∠A 的余弦值是方程 $2x^2-3x-2=0$ 的根，则 BC 的长是（　　）.

（A）7　　（B）6　　（C）5　　（D）4

（25）已知△ABC 的内角 A，角 B，角 C 的对边分别是 a，b，c．若 a，b，c 成等比数列，且 $c=2a$，则 $\cos B$ 的值是（　　）.

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{3}{4}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

（26）在△ABC 中，$a=4$，$b=6$，当△ABC 的面积最大时，∠C 的值是（　　）.

（A）90°　　（B）60°　　（C）45°　　（D）30°

（27）在△ABC 中，已知 $a=3$，$b=4$，$c=\sqrt{37}$，则△ABC 的面积是（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）$3\sqrt{3}$

（28）在△ABC 中，$\angle B=45°$，$c=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，那么∠C 等于（　　）.

（A）60°　　（B）120°　　（C）60°或 120　　（D）75°或 105°

（29）在△ABC 中，如果 $\sin 2A=\sin 2B$，那么△ABC 的形状是（　　）.

（A）等腰三角形　　（B）直角三角形

（C）等腰直角三角形　　（D）等腰三角形或直角三角形

（30）函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为（　　）.

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7

2．填空题

（1）$\overset{\frown}{AB}$ 所对圆心角为 30°，半径为 2，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度是______.

（2）$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{19\pi}{3}+\tan\left(-\frac{14\pi}{3}\right)=$______.

（3）已知 $\tan\alpha=2$，则 $\dfrac{\sin\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)+2\cos(-\alpha)}=$______.

（4）若 $P(-4，3)$是角α终边上一点，则 $\dfrac{\cos(\alpha-3\pi)\tan(\alpha-2\pi)}{\sin^2(\pi-\alpha)}$ 的值为______.

（5）已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个根，则 $\tan(\alpha+\beta)=$______.

（6）在△ABC 中，$(1+\tan A)(1+\tan B)=2$，则角 C 等于______.

（7）函数 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+4\cos(2x+31\pi)$的值域是______，周期是______.

（8）若函数 $f(x)=4\sin x+a\cos x$ 的最大值为 5，则常数 a 等于______.

（9）已知函数 $y=a\sin x+b$ 的最大值是 1，最小值是−7，则 $a\sin x+b\cos x$ 的最大值是______.

（10）在△ABC 中，$b:c=\sqrt{3}:\sqrt{2}$，$\angle B=60°$，则∠C 的值是______.

（11）在△ABC 中，角 A，角 B，角 C 的对边分别是 a，b，c，已知 $b=c$，$a^2=2b^2(1-\sin A)$，则$\angle A=$______.

（12）在△ABC 中，若$\angle A=120°$，$AB=5$，$BC=7$，则边 AC 的长度是_____.

（13）已知△ABC 的三个内角：角 A，角 B，角 C 成等差数列，且 $AB=1$，$BC=4$，则边 BC 上的中线 AD 长为_____.

（14）在△ABC 中，如果∠A 为锐角，且 $AB=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{6}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则边 BC 的长度是_____.

3．在△ABC 中，已知 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

求：（1）求角 C.（2）设 $AB=\sqrt{2}$，求△ABC 的面积.

4．已知 $\sin\alpha$和 $\cos\alpha$分别是方程 $5x^2-x+m=0$ 的两个实根．
求：（1）实数 m 的值．（2）当 $\alpha\in(0,\ \pi)$ 时，求 $\tan\alpha$的值．

5．已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x\quad(\omega>0)$的最小正周期为 π．
（1）求ω的值．
（2）求函数 $f(x)$的最大值，并求使函数取得最大值时 x 的取值集合．
（3）求函数 $f(x)$的单调递增区间．

6．已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(-\cos\beta,\ \sin\beta)$，其中$\alpha$，$\beta\in\mathbf{R}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$．
（1）求 $\cos(\alpha+\beta)$．
（2）若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin\beta=\dfrac{12}{13}$，求 $\sin\alpha$．

7．设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,\ -\cos x)$，$\boldsymbol{b}=(\sin x,\ -3\cos x)$，$\boldsymbol{c}=(-\cos x,\ \sin x)$，$x\in\mathbf{R}$．求函数 $f(x)$的最大值与最小正周期．

8．已知函数 $y=\cos 2x-2\cos x$．
（1）求 y 的最大值和最小值．
（2）在 $[0,\ \pi]$ 内写出当 y 最大和最小时 x 的值．

9．已知 $\triangle ABC$ 中，$AC=6$，$\angle C=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$．求：

（1）边 AB 的长．

（2）$\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$的值．

10．已知$\triangle ABC$ 是锐角三角形，边 a，b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两个根，角 A，角 B 满足 $2\sin(A+B)-\sqrt{3}=0$．求：

（1）角 C 的度数．（2）边 c 的长度．（3）$\triangle ABC$ 的面积．

11．如图 6-10 所示，甲、乙两船同时从港口 O 处出发，甲船以 25 n mile/h 的速度向东行驶，乙船以 15 n mile/h 的速度沿着北偏西 30° 的方向行驶，2 小时后，甲船到达 A 处，乙船到达 B 处．

（1）甲、乙两船间的距离 AB 是多少海里？

（2）此时乙船位于甲船北偏西多少度的方向上（精确到 0.01）？

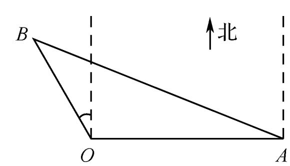


图 6-10

12．如图 6-11 所示，A 与 B 两点间有小山和小河，为求 AB 的长，需选择一点 C，使 AC 可直接测量，且 B 和 C 两点可通视，再在 AC 上取一点 D，使 B 和 D 两点可通视，测量 $AC=180$ m，$CD=60$ m，$\angle ACB=45°$，$\angle ADB=60°$，求 AB 的长．

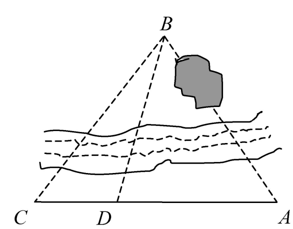


图 6-11

测 试 题 六

（时间为 120 分钟，满分 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分）

1．已知角α 终边过点 $P(3，4)$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha+\tan\alpha$ 的值是（　　）．

（A）$\dfrac{33}{20}$　　（B）$\dfrac{43}{20}$　　（C）$\dfrac{41}{15}$　　（D）$\dfrac{7}{4}$

2．如果 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 同号，那么角θ是（　　）．

（A）第一或第二象限角　　（B）第一或第三象限角

（C）第三或第四象限角　　（D）第二或第三象限角

3．在平面直角坐标系 xOy 中，角α 与角β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称，若 $\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$，则 $\tan\beta$ 的值为（　　）．

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$-\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{4}$　　（D）$-\dfrac{1}{4}$

4．若α是△ABC 的一个内角，且 $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，则 $\cos\alpha$ 的值是（　　）．

（A）$\dfrac{12}{13}$　　（B）$-\dfrac{12}{13}$　　（C）$\pm\dfrac{12}{13}$　　（D）$\pm\dfrac{8}{13}$

5．存在一个角 α，使下列关系式成立的是（　　）．

（A）$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ 且 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　（B）$1-2\sin^2\alpha=\dfrac{4}{3}$

（C）$\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{3}{4}$　　（D）$2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=2$

6．函数 $y=\sqrt{\sin x}$ 的定义域是（　　）．

（A）$[2k\pi,\ (2k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$　　（B）$[(2k-1)\pi,\ 2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$

（C）$\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$　　（D）$\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

7．$\alpha=30^\circ$ 是 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$的（　　）．

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分且必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

8．点 $P(1+\cos\theta，\sin\theta)$到直线 $3x-4y+2=0$ 的距离最大值是（　　）．

（A）2　　（B）1　　（C）$\dfrac{12}{5}$　　（D）$\dfrac{2}{5}$

9．设向量 $\boldsymbol{a}=(1，\cos\theta)$，$\boldsymbol{b}=(-1，2\cos\theta)$，$\theta\in\mathbf{R}$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\cos 2\theta$等于（　　）．

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）0　　（D）-1

10．函数 $y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则（　　）.

（A）当 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\max}=3$

（B）当 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\max}=3$

（C）当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\max}=3$

（D）当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$y_{\min}=-3$

11．已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值是（　　）.

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$-\frac{1}{5}$　　（C）$\frac{3}{5}$　　（D）$-\frac{3}{5}$

12．已知 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}$，则 $\tan(2\alpha-\beta)$ 等于（　　）.

（A）1　　（B）-1　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

13．若函数 $f(x)=\sin x\cos x\ (x\in\mathbf{R})$，则 $f(x)$是（　　）.

（A）最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数　　（B）最小正周期为 π 的奇函数

（C）最小正周期为 2π 的偶函数　　（D）最小正周期为 π 的偶函数

14．若 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，则 $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=$（　　）.

（A）$\sin\alpha+\cos\alpha$　　（B）$\sin\alpha-\cos\alpha$

（C）$\cos\alpha-\sin\alpha$　　（D）$-\sin\alpha-\cos\alpha$

15．已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2x$ 的值为（　　）.

（A）$\frac{19}{25}$　　（B）$\frac{16}{25}$　　（C）$\frac{14}{25}$　　（D）$\frac{7}{25}$

16．在△ABC 中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，则 $a:b:c=$（　　）.

（A）$2:\sqrt{3}:1$　　（B）$1:2:3$

（C）$3:2:1$　　（D）$1:\sqrt{3}:2$

17．已知点 P 是 120° 角终边上的一点，且点 P 到坐标原点 O 的距离是 2，则点 P 的坐标是（　　）.

（A）$(-1,\ \sqrt{3})$　　（B）$(-\sqrt{3},\ 1)$

（C）$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　（D）$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

18．已知 $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{3}{5}$，则角 x 所在的象限是（　　）.

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

19．在△ABC 中，若边 a=2，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$，面积 $S_{\triangle ABC}=5$，则△ABC 是（　　）.

（A）直角三角形　　（B）锐角三角形

（C）钝角三角形　　（D）等腰三角形

20．在△ABC 中，若∠A，∠B，∠C 成等差数列，且 BC=2，BA=1，则 AC 等于（　　）.

（A）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　（B）1　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）7

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．若 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，则角（$\pi+\alpha$）的终边与单位圆的交点 P 的坐标是______.

22．已知 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$，则 $\sin 2\alpha$=______.

23．$\cos(27^\circ+\alpha)\cos(33^\circ-\alpha)-\sin(27^\circ+\alpha)\sin(33^\circ-\alpha)$=______.

24．已知角 θ 是直线 $2x-y+3=0$ 的倾斜角，则 $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$=______.

25．△ABC 中，角 A、角 B、角 C 对应的边分别是 a，b，c，若 b=2，$c=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，∠B=60°，则∠C 等于_____.

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 40 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）已知 $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$，求 $\cos 2x$ 的值.

27．（7 分）已知点 $P(4，3)$是角 α 终边上一点，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2\alpha\right)$的值.

28．（8 分）设向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x，-\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(2\sin x，2\sin x)$，且函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+m$ 的最大值是 $\sqrt{2}$．

（1）求实数 m 的值．（2）若 $x\in\left(0，\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $f(x)=1$，求 x 的值．

29．（9 分）已知△ABC 中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}\,ac$．

求：（1）角 B 的大小．（2）$\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值．

30．（9 分）已知函数 $y=\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin 2x$．

（1）求该函数的最小正周期．

（2）求该函数的最大值及函数取得最大值时 x 的取值集合．

（3）求该函数的单调递减区间．

（4）在坐标系中，用“五点法”作出该函数在长度为一个周期的闭区间上的简图．

生命本身就是奇迹，每个人都要勇敢地去梦想，勇敢地创造奇迹。

第七章
平面解析几何

【复习要求】

解析几何是借助坐标法来研究某些几何图形的性质，把反映同一运动规律的平面图形（点、线、面）与数量关系（坐标及其所满足的方程）统一起来，从而把几何问题转化为代数问题解决，而且把曲线看成动点的轨迹，在运动变化中寻找规律．解析几何是提升思维水平和提高解决问题能力的重要载体．对本部分内容的复习建议如下：

1．理解直线的方向向量和法向量的概念，掌握直线的点向式方程和点法式方程．

2．理解直线的倾斜角和斜率的概念，会求直线的斜率，掌握直线的点斜式方程、斜截式方程和一般式方程．

3．会求两曲线的交点坐标．

4．会求点到直线的距离，掌握两条直线平行与垂直的条件．

5．了解线性约束条件、目标函数、线性目标函数、线性规划的概念．

6．掌握二元一次不等式（组）表示的区域．

7．掌握线性规划问题的图解法，并会解决简单的线性规划应用问题．

8．掌握圆的标准方程和一般方程以及直线与圆的位置关系，能灵活运用它们来解决有关问题．

9．了解待定系数法的概念，会用待定系数法解决有关问题．

10．掌握圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）的概念、标准方程和性质，能灵活运用它们解决有关问题．

【知识框图】

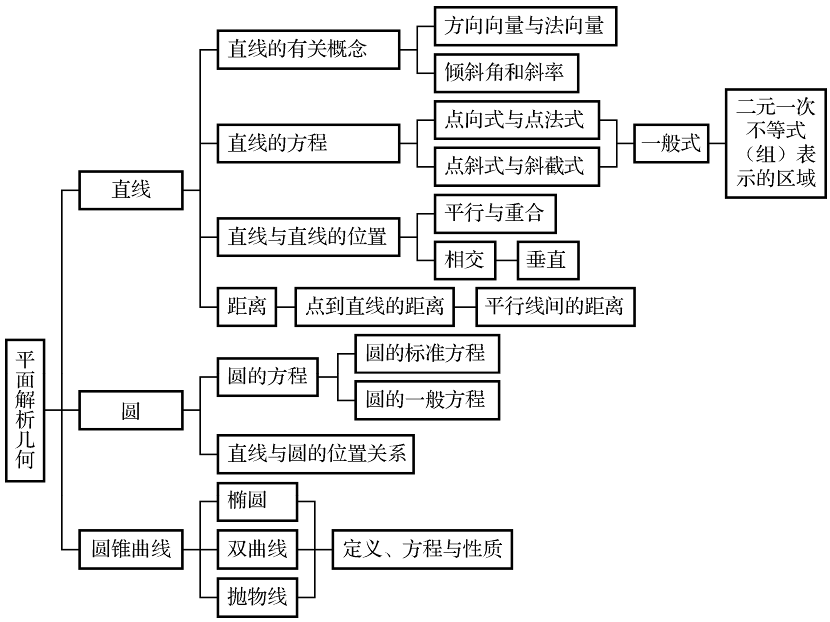


图 7-1

【知识要点】

1．直线的方向向量与法向量

（1）直线的方向向量：与一条直线平行的非零向量叫作这条直线的方向向量，它一般用 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$表示（$v_1$，$v_2$ 不全为零）.

一条直线的方向向量不是唯一的. 如果 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$是直线的一个方向向量，则 $t\boldsymbol{v}=(tv_1, tv_2)$ $(t\in\mathbf{R}, t\neq 0)$也是直线的方向向量.

（2）直线的法向量：与一条直线垂直的非零向量叫作这条直线的法向量，它一般用 $\boldsymbol{n}=(A, B)$表示（A，B 不全为零）.

一条直线的法向量不是唯一的. 如果 $\boldsymbol{n}=(A, B)$是直线的一个法向量，则 $t\boldsymbol{n}=(tA, tB)$　$(t\in\mathbf{R}, t\neq 0)$也是直线的法向量.

（3）若直线 l 的一般式方程是 $Ax+By+C=0$（A，B 不全为零），则 $\boldsymbol{n}=(A, B)$是直线 l 的一个法向量，$\boldsymbol{v}=(-B, A)$或$(B, -A)$是直线 l 的方向向量.

2．直线的斜率

（1）如果 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$是直线 l 的一个方向向量，且 $v_1\neq 0$，那么 $\dfrac{v_2}{v_1}$ 叫作直线 l 的斜率，记作 $k=\dfrac{v_2}{v_1}$. 当 $v_1=0$，即直线 l 与 x 轴垂直时，斜率 k 不存在.

（2）如果直线 l 经过两个点 $A(x_1, y_1)$与 $B(x_2, y_2)$，那么直线 l 的一个方向向量是 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$．当 $x_1\neq x_2$ 时，斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$；当 $x_1=x_2$ 时，即直线 l 与 x 轴垂直时，斜率 k 不存在．

（3）直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角 α，叫作直线 l 的倾斜角，并规定直线 l 与 x 轴平行或重合时 $\alpha=0$，因此 $0\leqslant\alpha<\pi$．直线 l 的倾斜角 α 的正切值，也称直线 l 的斜率，即 $k=\tan\alpha$．当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，即直线 l 与 x 轴垂直时，斜率 k 不存在．由此还可得到以下结论：

$\alpha=0\Leftrightarrow k=0$；$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow k>0$；$\alpha=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow k$ 不存在；$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\Leftrightarrow k<0$．

（4）如果直线 l 的斜率为 k，则 $\boldsymbol{v}=(1,k)$是直线 l 的一个方向向量，$\boldsymbol{n}=(k,-1)$是直线 l 的一个法向量．

3．直线的方程

（1）点向式方程：直线 l 经过已知点 $P(x_0, y_0)$，且它的一个方向向量是 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$，则直线 l 的方程是 $v_2(x-x_0)-v_1(y-y_0)=0$．

特别指出：

当 $v_1\neq0$，$v_2\neq0$，即直线 l 与坐标轴不平行时，其方程是 $\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}$；

当 $v_1\neq0$，$v_2=0$，即直线 l 与 x 轴平行时，其方程是 $y=y_0$；

当 $v_1=0$，$v_2\neq0$，即直线 l 与 y 轴平行时，其方程是 $x=x_0$．

（2）点法式方程：直线 l 经过已知点 $P(x_0, y_0)$，且它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B)$，则直线 l 的方程是 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$．

（3）点斜式方程：直线 l 经过已知点 $P(x_0, y_0)$，且它的斜率为 k，则直线 l 的方程是 $y-y_0=k(x-x_0)$．

（4）斜截式方程：直线 l 的斜率是 k，它在 y 轴上的截距（直线与 y 轴交点的纵坐标）是 b，则直线 l 的方程是 $y=kx+b$．

（5）一般式方程：关于 x，y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不全为零）叫作直线 l 的一般式方程．

如果直线 l 的一般式方程是 $Ax+By+C=0$，则与它平行的直线可以表示成 $Ax+By+D=0\ (D\neq C)$，与它垂直的直线可以表示成 $Bx-Ay+E=0$．

4．待定系数法：在求某些具有特定形式的函数解析式（或直线方程、圆及二次曲线方程等）时，可先引进一些尚待确定的系数来表示所求结果，然后通过已知条件建立起以待定系数为未知数的方程或方程组，解之求得待定的系数，从而得到所求函数解析式（或直线方程、圆及二次曲线方程等）．这种研究或解决数学问题的方法就是待定系数法．

5．点 $P_0(x_0, y_0)$到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$．

6．两条直线的位置关系，见表 7-1．

表 7-1 两条直线的位置关系

位置关系 \ 直线方程	一般式 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$ l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$	斜截式 l_1：$y=k_1x+b_1$ l_2：$y=k_2x+b_2$
相交	$A_1B_2-A_2B_1\neq0$	$k_1\neq k_2$
平行	$A_1B_2-A_2B_1=0$，$A_1C_2-A_2C_1\neq0$	$k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$
重合	$A_1B_2-A_2B_1=0$，$A_1C_2-A_2C_1=0$	$k_1=k_2$，$b_1=b_2$

7．两条直线的垂直

（1）运用直线方程的一般式．设 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，则

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$$

（2）运用直线方程的斜截式．设 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$$

8．二元一次不等式表示的平面区域

直线 l：$Ax+By+C=0$ 将坐标平面内不在直线 l 上的点分为两部分，直线 l 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B)$指向的那一侧的半平面上所有点的坐标都满足不等式 $Ax+By+C>0$；而在直线 l 的另一侧所有点的坐标都满足不等式 $Ax+By+C<0$．

判断二元一次不等式表示的区域也可采用“试点法”，选择合适的点代入不等式，根据不等式是否成立从而判断出不等式所表示的区域．例如当直线不过原点时，将点（0，0）代入二元一次不等式，若不等式成立，则其表示的区域是含有原点一侧的半平面；若不等式不成立，则表示的是不含原点的一侧的半平面．

9．线性规划问题

一般地，在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值问题，统称为线性规划问题．

（1）由关于 x，y 的不等式（或方程）组成的不等式组称为 x，y 的约束条件．关于 x，y 的一次不等式（或方程）组成的不等式组称为 x，y 的线性约束条件．

（2）需求最大（小）值的函数称为目标函数；当目标函数是关于变量 x，y 的一次解析式时，又称为线性目标函数．

10．线性问题的图解法

在线性规划的问题中，画出线性约束条件所表示的平面区域，在平面区域上找出线性目标函数最值的方法，称为线性规划的图解法．

一般地，满足线性约束条件的解(x, y)叫作可行解，由所有可行解组成的集合叫作可行域．在可行域中，使目标函数取得最大值或最小值的可行解叫作这个问题的最优解．

11．圆的方程

（1）圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\quad(r>0)$，其圆心是 $C(a, b)$，半径是 r.

（2）圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\quad(D^2+E^2-4F>0)$，其圆心是 $C\left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$，半径是 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

12．直线与圆的位置关系的判定方法

（1）几何法

$$d > r \Leftrightarrow \text{直线与圆相离；}$$
$$d = r \Leftrightarrow \text{直线与圆相切；}$$
$$d < r \Leftrightarrow \text{直线与圆相交.}$$

其中，d 是圆心到直线的距离，r 是圆的半径.

（2）代数法

将直线方程与圆的方程联立方程组，消去 y（或 x），得到一个关于 x（或 y）的一元二次方程，依据一元二次方程根的情况，确定联立方程组解的情况，从而判定出直线与圆的位置关系.

$\varDelta>0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程有两个相异实数根 $\Leftrightarrow$ 方程组有两个不同的解 $\Leftrightarrow$ 直线与圆相交；

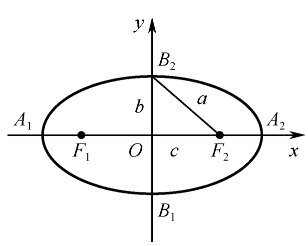
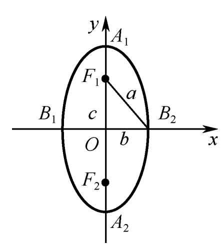
$\varDelta=0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程有两个相等实数根 $\Leftrightarrow$ 方程组有唯一的解 $\Leftrightarrow$ 直线与圆相切；

$\varDelta<0 \Leftrightarrow$ 一元二次方程没有实数根 $\Leftrightarrow$ 方程组无解 $\Leftrightarrow$ 直线与圆相离.

13．圆锥曲线

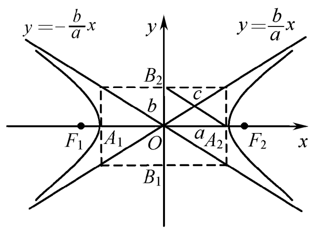
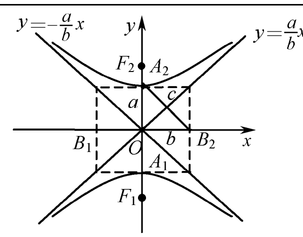
（1）椭圆，如表 7-2 所示.

表 7-2　椭圆

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">平面内到两个定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数（大于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫作椭圆</td></tr>
<tr><td>标准方程</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$</td><td>$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$A_1(-a，0)$，$A_2(a，0)$
$B_1(0，-b)$，$B_2(0，b)$</td><td>$A_1(0，a)$，$A_2(0，-a)$
$B_1(-b，0)$，$B_2(b，0)$</td></tr>
<tr><td>焦点</td><td>$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$</td><td>$F_1(0，c)$，$F_2(0，-c)$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\dfrac{c}{a} \quad (0<e<1)$</td></tr>
<tr><td>重要关系式</td><td colspan="2">$a^2=b^2+c^2$</td></tr>
<tr><td>轴长与焦距</td><td colspan="2">长轴长$|A_1A_2|=2a$，长半轴长为 a；短轴长$|B_1B_2|=2b$，短半轴长为 b；
焦距$|F_1F_2|=2c$，半焦距为 c</td></tr>
<tr><td>特性</td><td colspan="2">P 为椭圆上一点$\Leftrightarrow|PF_1|+|PF_2|=2a$</td></tr>
</table>

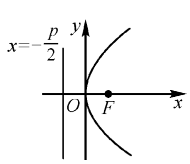
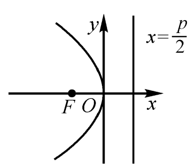
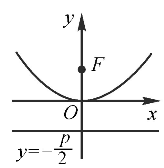
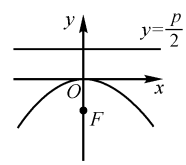
（2）双曲线，如表 7-3 所示．

表 7-3　双曲线

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="2">平面内到两个定点 F_1、F_2 的距离之差的绝对值等于常数（小于$|F_1F_2|$）的点的轨迹叫作双曲线</td></tr>
<tr><td>标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　($a>0$，$b>0$)</td><td>$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$　($a>0$，$b>0$)</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$A_1(-a，0)$，$A_2(a，0)$</td><td>$A_1(0，-a)$，$A_2(0，a)$</td></tr>
<tr><td>焦点</td><td>$F_1(-c，0)$，$F_2(c，0)$</td><td>$F_1(0，-c)$，$F_2(0，c)$</td></tr>
<tr><td>渐近线</td><td>$y=\pm\frac{b}{a}x$</td><td>$y=\pm\frac{a}{b}x$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">$e=\frac{c}{a}$　($e>1$)</td></tr>
<tr><td>重要关系式</td><td colspan="2">$c^2=a^2+b^2$</td></tr>
<tr><td>轴长与焦距</td><td colspan="2">实轴长 $|A_1A_2|=2a$，实半轴长为 a；虚轴长 $|B_1B_2|=2b$，虚半轴长为 b；
焦距 $|F_1F_2|=2c$，半焦距为 c</td></tr>
<tr><td>特性</td><td colspan="2">P 为双曲线上一点 $\Leftrightarrow |PF_1|-|PF_2|=\pm 2a$</td></tr>
</table>

（3）抛物线，如表 7-4 所示．

表 7-4　抛物线(p>0)

<table>
<tr><td>定义</td><td colspan="4">平面内到定点 F 和一条定直线 l 距离相等的点的轨迹叫作抛物线</td></tr>
<tr><td>标准方程</td><td>$y^2=2px$</td><td>$y^2=-2px$</td><td>$x^2=2py$</td><td>$x^2=-2py$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>顶点</td><td colspan="4">$O(0，0)$</td></tr>
<tr><td>焦点</td><td>$F\left(\frac{p}{2}，0\right)$</td><td>$F\left(-\frac{p}{2}，0\right)$</td><td>$F\left(0，\frac{p}{2}\right)$</td><td>$F\left(0，-\frac{p}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>准线</td><td>$x=-\frac{p}{2}$</td><td>$x=\frac{p}{2}$</td><td>$y=-\frac{p}{2}$</td><td>$y=\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="4">$e=1$</td></tr>
<tr><td>特性</td><td colspan="4">（1）焦点 F 到准线 l 的距离为 p；（2）顶点到焦点的距离与顶点到准线的距离都是 $\frac{p}{2}$；
（3）P 为抛物线上一点 $\Leftrightarrow$ 点 P 到焦点的距离等于点 P 到准线的距离</td></tr>
</table>

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）已知直线 $x+y-2=0$ 与直线 $x-2y+1=0$ 的交点为 P，若直线 l 经过点 P，且平行于向量 $\boldsymbol{n}=(2，3)$，则直线 l 的方程是（　　）.

（A）$2x+3y-5=0$　　（B）$2x-3y+1=0$

（C）$3x-2y-1=0$　　（D）$3x+2y-5=0$

分析：解方程组 $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，可得点 $P(1，1)$．因为直线 l 平行于向量 $\boldsymbol{n}=(2，3)$，根据直线的点向式方程，有 $3\times(x-1)-2\times(y-1)=0$，所以直线 l 的方程是 $3x-2y-1=0$，故选 C.

（2）已知直线 l_1：$mx+2y-5=0$，l_2：$3x-y-4=0$，且 $l_1 // l_2$，则实数 m 的值是（　　）.

（A）6　　（B）-6　　（C）$-\dfrac{2}{3}$　　（D）$\dfrac{2}{3}$

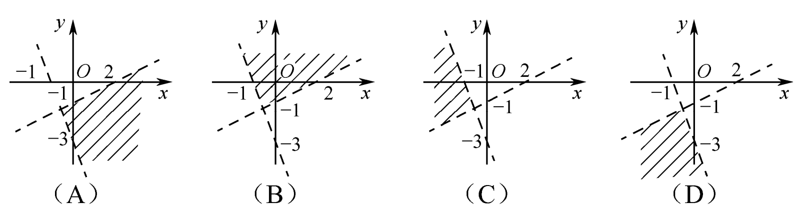
分析：直线 l_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(m，2)$，直线 l_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(3，-1)$，因为 $l_1//l_2$，所以 $\boldsymbol{n}_1//\boldsymbol{n}_2$，所以 $2\times3=m\times(-1)$，故选（B）.

（3）直线 l：$x\sin 30°+y\cos 30°+1=0$，则直线 l 的倾斜角是（　　）.

（A）30°　　（B）60°　　（C）120°　　（D）150°

分析：将直线化为斜截式方程 $y=-\dfrac{\sin 30°}{\cos 30°}x-\dfrac{1}{\cos 30°}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，可以看出直线的斜率 $k=\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha=150°$，所以直线 l 的倾斜角是 150°，故选（D）.

（4）不等式组 $\begin{cases} x-2y-2<0 \\ 3x+y+3>0 \end{cases}$ 表示的区域是（　　）.



分析：因为直线 $x-2y-2=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1，-2)$，所以不等式 $x-2y-2<0$ 表示的区域在法向量 $\boldsymbol{n}=(1，-2)$的反方向指向的一侧；直线 $3x+y+3=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(3，1)$，所以不等式 $3x+y+3>0$ 表示的区域在法向量 $\boldsymbol{n}=(3，1)$所指向的一侧，所以选（B）．另外，可以用“试点法”判断，例如观察原点$(0，0)$是否满足不等式组，故选（B）.

（5）设 x，y 满足的约束条件是 $\begin{cases} 2x+y-6\geqslant 0 \\ x+2y-6\leqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$，

则目标函数 $z=-x+y$ 的最小值是（　　）.

（A）−3　　　　　　（B）−4

（C）−6　　　　　　（D）−8

分析：不等式组表示的平面区域是图 7-2 中所示的阴影部分．平移直线 $y=x$，当直线过点（6，0）时，目标函数 $z=-x+y$ 取得最小值−6，故选（C）.

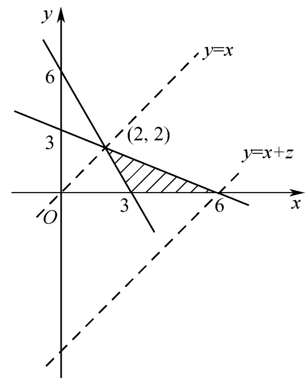


图 7-2

（6）点 $P(1，1)$与圆 $x^2+y^2=1$的位置关系是（　　）.

（A）点 P 在圆内　　　　（B）点 P 在圆外

（C）点 P 在圆上　　　　（D）无法判定

分析：圆心是 $O(0，0)$，半径是 1，点 $P(1，1)$到圆心 $O(0，0)$的距离$|\overrightarrow{PO}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{PO}|>1$，点 P 在圆外，故选（B）.

本题考查的是点与圆的位置关系．其方法是先求出点 P 到圆心 O 的距离$|\overrightarrow{PO}|$，再与圆的半径 r 相比较.

$|\overrightarrow{PO}|=r\Leftrightarrow$点 P 在圆上；$|\overrightarrow{PO}|>r\Leftrightarrow$点 P 在圆外；$|\overrightarrow{PO}|<r\Leftrightarrow$点 P 在圆内.

（7）若圆 $x^2+y^2+ax-2=0$ 的圆心是$(1，0)$，则该圆的半径是（　　）.

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

分析：由题意知$-\dfrac{a}{2}=1$，得 $a=-2$，所以 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\sqrt{3}$，故选（B）.

（8）设 P 是圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 上的动点，Q 是直线 $3x+4y-18=0$ 上的动点，则$|PQ|$的最小值为（　　）.

（A）5　　（B）1　　（C）3　　（D）2

分析：本题考查圆的性质以及点到直线的距离公式．圆心为$(1，0)$，半径为 2，圆心到直线 $3x+4y-18=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|3\times1+4\times0-18|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，所以$|PQ|$的最小值为 3−2=1，故选（B）.

（9）设椭圆$\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$过点 $P(2，-\sqrt{3})$，则其焦距为（　　）.

（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$2\sqrt{5}$　　（C）$4\sqrt{3}$　　（D）$4\sqrt{5}$

分析：把点 P 的坐标代入椭圆方程，解得 $m^2=16$，即 $a^2=16$．又因为 $b^2=4$，所以 $c^2=a^2-b^2=16-4=12$，得到 $c=2\sqrt{3}$．因此 $2c=4\sqrt{3}$，故选（C）.

（10）已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a>b>0)$的左、右焦点为 F_1，F_2，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交椭圆于 A，B 两点，若$\triangle AF_1B$ 的周长为$4\sqrt{3}$，则该椭圆的方程为（　　）.

（A）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$

（C）$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$

分析：因为$\triangle AF_1B$ 的周长为$4\sqrt{3}$，所以 $4a=4\sqrt{3}$，$a=\sqrt{3}$；又因为离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以

得 c=1，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，故选（A）.

（11）直线 l：$x-2y+2=0$ 过椭圆的左焦点 F_1 和一个顶点 B，则该椭圆的离心率为（　　）.

（A）$\frac{2}{5}$　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\frac{1}{5}$　　（D）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

分析：因为直线 l：$x-2y+2=0$ 与 x 轴的交点（−2，0）是椭圆的左焦点，所以 c=2；与 y 轴的交点（0，1）是椭圆的一个顶点 B，所以 b=1，由 $a^2=b^2+c^2=5$ 得　$a=\sqrt{5}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故选（D）.

（12）已知 F_1 是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,b>0)$的左焦点，点 P 在双曲线上，直线 PF_1 与 x 轴垂直，且$|PF_1|=a$，则双曲线的离心率等于（　　）.

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）3

分析：由题意可知，点 P 是第二或第三象限内的点．不妨设点 P 是第二象限内满足条件的点，根据双曲线的定义，有$|PF_2|-|PF_1|=2a$，又$|PF_1|=a$，所以$|PF_2|=3a$，又因为直线 PF_1 与 x 轴垂直，所以$\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形，且$|F_1F_2|=2c$，由勾股定理：$|PF_2|^2-|PF_1|^2=|F_1F_2|^2$ 得 $c=\sqrt{2}\,a$，则离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，故选（A）.

（13）设 F_1，F_2 分别是双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的左、右焦点，点 P 在双曲线上，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$的值等于（　　）.

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）4　　（D）8

分析：a=2，b=1，$c=\sqrt{5}$．由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$ 得　$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$．

$$|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2=|\overrightarrow{F_1F_2}|^2=(2c)^2=20,$$

由双曲线定义知$||\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}||=2a=4$，从而

$$|\overrightarrow{PF_1}|^2+|\overrightarrow{PF_2}|^2-2|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=16,$$

因此$|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|=2$．故选（A）.

（14）已知顶点在原点，焦点在坐标轴上的抛物线经过点(2，2)，则该抛物线的标准方程是（　　）.

（A）$y^2=2x$　　（B）$x^2=2y$

（C）$y^2=\pm 2x$　　（D）$y^2=2x$ 或 $x^2=2y$

分析：抛物线经过点(2，2)，其开口可能向右，也可能向上．当抛物线开口向右时，设抛物线方程为 $y^2=2px$（$p>0$），则 $2^2=2p\times 2$，解得 p=1，抛物线的标准方程为 $y^2=2x$．当抛物线开口向上时，设抛物线方程为 $x^2=2py$（$p>0$），则 $2^2=2p\times 2$，解得 p=1，抛物线的标准方程为 $x^2=2y$，故答案选 D.

（15）若 M 是抛物线 $y^2=x$ 上的任意一点，F 是该抛物线的焦点，则点 M 到 F 的距离与点 M 到 $A(3,-1)$的距离之和的最小值是（　　）.

（A）3　　（B）$\dfrac{13}{4}$　　（C）4　　（D）$\dfrac{7}{2}$

分析：因为$|MF|$等于点 M 到准线的距离，当 MA 与准线垂直时，所求的距离之和最小. 所以，最小值为$3+\dfrac{p}{2}=3+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{4}$，故选（B）.

（16）抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的准线与 x 轴交于点 P，倾斜角为α的直线 l 经过点 P，若 l 与抛物线相切，则α 等于（　　）.

（A）30°　　（B）45°　　（C）30°或 150°　　（D）45°或 135°

分析：抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的准线与 x 轴的交点 $P\left(-\dfrac{p}{2},\ 0\right)$，依题意直线 l 的斜率存在，设为 k，则直线 l 的方程为 $y=k\left(x+\dfrac{p}{2}\right)$，由$\begin{cases}y=k\left(x+\dfrac{p}{2}\right)\\ y^2=2px\end{cases}$可得　$k^2x^2+(pk^2-2p)x+\dfrac{p^2k^2}{4}=0$，因为直线 l 与抛物线相切，所以$\Delta=(pk^2-2p)^2-4\times k^2\times\dfrac{p^2k^2}{4}=-4p^2k^2+4p^2=0$，即 $k^2=1$，解得 $k=\pm1$，即 $\tan\alpha=\pm1$，可得直线 l 的倾斜角为 45°或 135°，故答案选 D.

【例 2】填空题

（1）过点$(3,-2)$，且与直线$x+2y+3=0$垂直的直线方程为______________.

分析：设所求直线方程为$2x-y+D=0$.

因为直线过点$(3,-2)$，所以$2\times3-(-2)+D=0$，解得$D=-8$.

因此所求直线方程为$2x-y-8=0$.

（2）不等式组$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+3y\geqslant 4\\ 3x+y\leqslant 4\end{cases}$所表示的平面区域的面积等于____________.

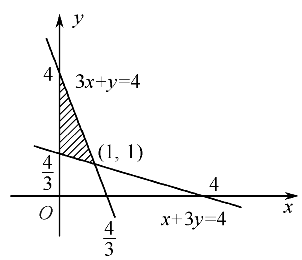


图 7-3

分析：不等式组表示的区域是一个三角形，如图 7-3 所示的阴影部分，三个顶点分别为$\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$，（0，4），（1，1），

所以三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(4-\dfrac{4}{3}\right)\times1=\dfrac{4}{3}$.

（3）若曲线$x^2+y^2+2ay+2-a=0$表示圆，则 a 的取值范围是____________.

分析：将曲线方程$x^2+y^2+2ay+2-a=0$配方得

$$x^2+(y+a)^2=a^2+a-2$$

因为它表示圆，所以$a^2+a-2>0$，即$a<-2$或$a>1$.

所以 a 的取值范围是$(-\infty，-2)\cup(1，+\infty)$.

（4）圆心在直线 $x-2y=0$ 上的圆 C 与 y 轴的正半轴相切，圆 C 截 x 轴所得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则圆 C 的标准方程为_______________.

分析：因为圆 C 与 y 轴的正半轴相切，所以圆心在第一象限里，设圆心为$\left(a,\ \dfrac{a}{2}\right)$ $(a>0)$，则圆的半径为 a．由勾股定理 $(\sqrt{3})^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2$ 得 $a=2$，所以圆心为(2，1)，半径为 2，因此圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$．

（5）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，过焦点且垂直于 x 轴的直线被椭圆截得的线段长等于椭圆的焦距，该椭圆的离心率等于_____________.

分析：不妨设过椭圆右焦点 F_2 的直线与椭圆在第一象限交于点 A，则$|AF_2|=c$，A 到左焦点 F_1 的距离$|AF_1|=2a-c$，于是在直角三角形 F_1F_2A 中，$(2a-c)^2=(2c)^2+c^2$，化简得：$c^2+ac-a^2=0$，两边同除以 a^2 得　$e^2+e-1=0$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，或 $e=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（舍去）.

（6）过点 $P(2，-2)$且与 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 有相同渐近线的双曲线方程是____________.

分析：因为双曲线与 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 有相同的渐近线方程，所以设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=k$，因为双曲线经过点 $P(2，-2)$，所以 $\dfrac{2^2}{2}-(-2)^2=-2=k$，所以双曲线的方程为 $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=1$．其他方法：可以先求出双曲线的渐近线，根据焦点在不同的坐标轴上，分情况讨论并求解.

点评： 求与 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 渐近线相同的双曲线时，其方程可设为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=k$.

（7）设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 只有一个公共点，则双曲线的离心率为__________________.

分析：双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线为 $y=\dfrac{b}{a}x$，由方程组 $\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x \\ y=x^2+1 \end{cases}$，消去 y，得 $x^2-\dfrac{b}{a}x+1=0$，又因为只有一个公共点，所以 $\Delta=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-4=0$，所以 $\dfrac{b}{a}=2$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$．

（8）已知双曲线 $x^2-y^2=1$，点 F_1，F_2 为其两个焦点，点 P 为双曲线上一点，若 $PF_1\perp PF_2$，则$|PF_1|+|PF_2|$的值为_________________.

分析：由双曲线的方程可知 $a=1$，$c=\sqrt{2}$，所以 $||PF_1|-|PF_2||=2a=2$，两边平方得：$|PF_1|^2-2|PF_1||PF_2|+|PF_2|^2=4$. 又因为 $PF_1\perp PF_2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，$|PF_1|^2+|PF_2|^2=(2c)^2=8$，所以 $|PF_1||PF_2|=2$．

又因为$(|PF_1|+|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|$=8+4=12，所以$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{3}$．

（9）已知抛物线$y^2=2px$（$p>0$）上第一象限内的点 M 的横坐标为8，点 M 到焦点 F 的距离为10，则抛物线的焦点到准线的距离为________________.

分析：如图7-4所示，由抛物线定义可知，点 M 到准线的距离也是10，所以准线到 y 轴的距离为$10-8=\frac{p}{2}$，解得 $p=4$，所以抛物线的焦点到准线的距离为4.

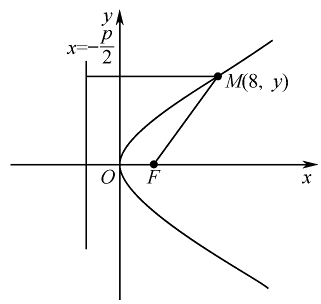


图7-4

【例3】已知两点 $A(-7，4)$，$B(-5，6)$，求线段 AB 的垂直平分线方程.

解法一：线段 AB 的中点坐标是$(-6，5)$，所求直线的法向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}=(2，2)$．由直线的点法式方程，得到线段 AB 的垂直平分线方程为$2(x+6)+2(y-5)=0$，即$x+y+1=0$．

解法二：因为直线 AB 的斜率$k_{AB}=\frac{6-4}{-5-(-7)}=1$，所以线段 AB 的垂直平分线的斜率$k'=-1$．又因为线段 AB 的中点的坐标$(-6，5)$，由直线的点斜式方程，得到线段 AB 的垂直平分线方程为$y-5=-(x+6)$，即$x+y+1=0$．

【例4】已知直线l_1：$(m+3)x+4y=5-3m$；l_2：$2x+(m+5)y=8$．求当直线l_1与l_2满足（1）相交、（2）平行、（3）重合时 m 的值.

解：由$A_1B_2-A_2B_1=0$，即$(m+3)(m+5)-2\times4=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=-7$.

由$A_1C_2-A_2C_1=0$，即$(m+3)(-8)-2(3m-5)=0$，解得 $m=-1$.

（1）当 $m\neq-1$ 且 $m\neq-7$ 时，$A_1B_2-A_2B_1\neq0$，l_1与l_2相交.

（2）当 $m=-7$ 时，有$A_1B_2-A_2B_1=0$且$A_1C_2-A_2C_1\neq0$，所以l_1与l_2平行.

（3）当 $m=-1$ 时，有$A_1B_2-A_2B_1=0$且$A_1C_2-A_2C_1=0$，所以l_1与l_2重合.

【例5】求点 $P(4，5)$关于直线 l：$3x-y+3=0$的对称点 Q 的坐标.

解：因为点 P，Q 关于直线 l 对称，所以直线 l 是线段 PQ 的中垂线，如图7-5所示，设直线 PQ 的方程为$x+3y+D=0$，把点 $P(4，5)$代入方程，得$4+3\times5+D=0$，解得$D=-19$.

故直线 PQ 的方程为$x+3y-19=0$.

解方程组$\begin{cases}x+3y-19=0\\3x-y+3=0\end{cases}$得$\begin{cases}x=1\\y=6\end{cases}$，

由此得到直线 PQ 与 l 的交点 $A(1，6)$.

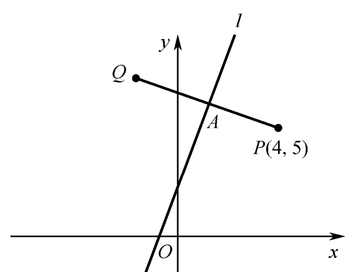


图7-5

设点 P 关于直线 l: $3x-y+3=0$的对称点为$Q(x'，y')$.

因为点 A 是线段 PQ 的中点.

所以$\begin{cases}1=\frac{x'+4}{2}\\6=\frac{y'+5}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x'=-2\\y'=7\end{cases}$．则点 Q 的坐标为$(-2，7)$.

【例 6】已知圆的方程为 $x^2+y^2=4$，求：（1）过点 $A(\sqrt{3},\ 1)$ 的该圆的切线方程.（2）过点 $B(2,\ 3)$ 的圆的切线方程；（3）与直线 $x+3y=10$ 垂直的圆的切线方程.

解：（1）经验证可知点 $A(\sqrt{3},\ 1)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，即 A 为切点，如图 7-6 所示.

由切线的几何性质可知所求直线的法向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OA}=(\sqrt{3},\ 1)$.

所求切线的点法式方程为 $\sqrt{3}(x-\sqrt{3})+(y-1)=0$，即 $\sqrt{3}x+y-4=0$.

点评：易证过圆 $x^2+y^2=r^2\quad(r>0)$ 上一点 $A(x_0,\ y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$. 此题也可以应用上述公式直接求得.

（2）由 $2^2+3^2=13>4$，可知点 B 在圆外，因此所求的切线必有两条，如图 7-7 所示.

设圆的切线方程为 $a(x-2)+b(y-3)=0$，即 $ax+by-2a-3b=0$（a，b 不全为 0).

因为圆心到切线的距离等于半径，所以 $\dfrac{|-2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，

整理得 $5b^2=12ab$，解得 $b=0$ 或 $b=-\dfrac{12}{5}a$.

因此所求切线方程为 $x-2=0$ 或 $5x-12y+26=0$.

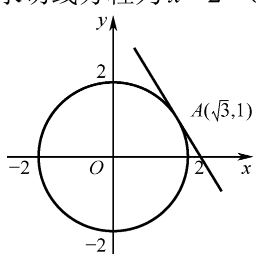


图 7-6

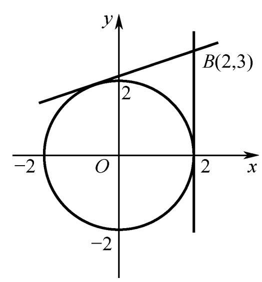


图 7-7

（3）如图 7-8 所示，因为所求的切线与直线 $x+3y=10$ 垂直. 因此可设所求的切线方程为 $3x-y+C=0$. 因为圆心到切线的距离等于半径，所以

$\dfrac{|3\times 0-0+C|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2$，解得 $C=\pm 2\sqrt{10}$.

所求的切线方程为 $3x-y\pm 2\sqrt{10}=0$.

点评：经过圆上一点，圆的切线只有一条；经过圆外一点，圆的切线必有两条；与已知直线垂直（或平行）的圆的切线必有两条. 求圆的切线方程一定要注意解的情况.

【例 7】直线 l 经过点 $P(5,\ 5)$，且和圆 O: $x^2+y^2=25$ 相交于 A，B. 若 $AB=4\sqrt{5}$，求直线 l 的方程.

解：如图 7-9 所示，作 $OH\perp AB$ 于 H，则 H 是 AB 的中点.

由 $|AH|=2\sqrt{5}$，$|AO|=5$，得 $|OH|=\sqrt{5}$.

由题意知直线 l 的斜率一定存在，故设方程是：

$y-5=k(x-5)$，即 $kx-y+5(1-k)=0$.

于是得到 $\dfrac{|5(1-k)|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$，或 $k=2$.

直线 l 的方程是

$$x-2y+5=0 \text{ 或 } 2x-y-5=0 .$$

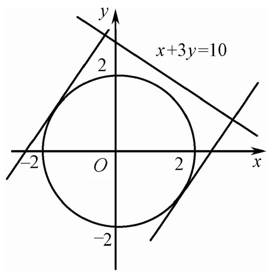


图 7-8

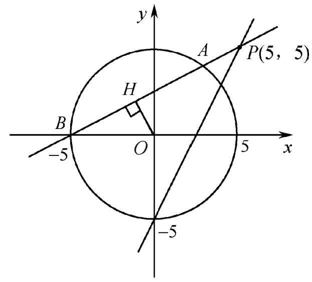


图 7-9

点评：解决直线与圆的有关问题时，灵活运用圆的几何性质，特别是巧用圆心与直线的距离，往往可以得到简捷的解法.

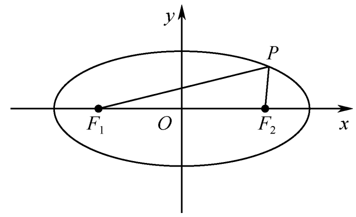


图 7-10

【例 8】 如图 7-10 所示，点 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$ 上一点，F_1,F_2 是椭圆的两个焦点，若 $\angle F_1PF_2=60°$，求△ PF_1F_2 的面积.

解：由题意可知 $a=10$，$b=8$，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-64}=6$.

设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，故在△ PF_1F_2 中，$|F_1F_2|=2c=12$，$|PF_1|+|PF_2|=m+n=2a=20$.

由余弦定理得

$(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos 60°=(m+n)^2-2mn-2mn\times\dfrac{1}{2}=(m+n)^2-3mn$，

即 $12^2=20^2-3mn$，解得 $mn=\dfrac{256}{3}$.

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}mn\sin 60°=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{256}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$.

【例 9】 如图 7-11 所示，F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$）的左、右焦点，A 是椭圆 C 的顶点，B 是直线 AF_2 与椭圆 C 的另一个交点，$\angle F_1AF_2=60°$.

（1）求椭圆 C 的离心率.

（2）已知△AF_1B 的面积为 $40\sqrt{3}$，求 a，b 的值.

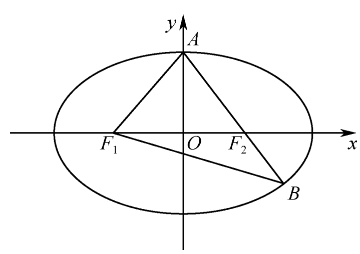


图 7-11

解：（1）因为 $\angle F_1AF_2=60°$，所以 $\angle OAF_2=30°$，

在 Rt△OAF_2 中，$AF_2=a$，$OF_2=c$，所以 $a=2c$，

可得离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

（2）设 $|BF_2|=m$，则 $|BF_1|=2a-m$，在△BF_1F_2 中，

$|BF_1|^2=|BF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|BF_2|\times|F_1F_2|\times\cos 120^\circ$，

所以$(2a-m)^2=m^2+a^2+am$，得 $m=\dfrac{3}{5}a$.

又因为$\triangle AF_1B$ 的面积

$S=\dfrac{1}{2}|AF_1|\times|AB|\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times a\times\left(a+\dfrac{3}{5}a\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$，解得 $a=10$.

由 $b^2=a^2-c^2=75$ 得　$b=5\sqrt{3}$.

点评：若点 P 是椭圆或双曲线上一点，根据定义有，$|PF_1|+|PF_2|=2a$（椭圆），$||PF_1|-|PF_2||=2a$（双曲线），$|F_1F_2|=2c$，应用余弦定理可以解决$\triangle PF_1F_2$的面积、周长等问题.

【例 10】已知曲线方程$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{k-16}=1$.

（1）当 k 为何值时，表示圆.

（2）当 k 为何值时，表示椭圆；当 k 为何值时，表示焦点在 x 轴上的椭圆.

（3）当 k 为何值时，表示双曲线；当 k 为何值时，表示焦点在 y 轴上的双曲线.

分析：曲线方程中 x^2，y^2 系数的大小及符号是区分曲线形状的依据.

解：（1）当$\begin{cases}25-k>0\\ k-16>0\\ 25-k=k-16\end{cases}$，即 $k=20.5$ 时，方程表示圆.

（2）当$\begin{cases}25-k>0\\ k-16>0\\ 25-k\neq k-16\end{cases}$，即$16<k<25$ 且 $k\neq20.5$ 时，方程表示椭圆.

当$\begin{cases}25-k>0\\ k-16>0\\ 25-k>k-16\end{cases}$，即 $16<k<20.5$ 时，方程表示焦点在 x 轴上的椭圆.

（3）当$\begin{cases}25-k>0\\ k-16<0\end{cases}$或$\begin{cases}25-k<0\\ k-16>0\end{cases}$时，即 $k<16$ 或 $k>25$ 时，方程表示双曲线.

当$\begin{cases}25-k<0\\ k-16>0\end{cases}$，即 $k>25$ 时，方程表示焦点在 y 轴上的双曲线.

【例 11】如图 7-12 所示，已知斜率为 1 的直线 l 过椭圆$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$的右焦点 F_2，交椭圆于 A 与 B 两点．求（1）弦长$|AB|$.（2）$S_{\triangle AF_1B}$（F_1是左焦点）.

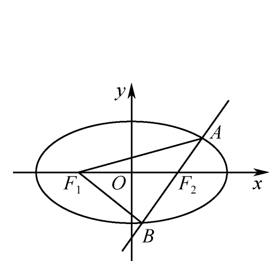


图 7-12

解：（1）因为$a^2=3$，$b^2=2$，所以$c^2=3-2=1$，即 $c=1$．由此得 $F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$.

因此所求直线 AB 的方程是 $y=1\times(x-1)$，即 $x-y-1=0$，

由$\begin{cases}x-y-1=0\\2x^2+3y^2=6\end{cases}$消去$x$得　$5y^2+4y-4=0$.

由韦达定理得$y_1+y_2=-\dfrac{4}{5}$，$y_1y_2=-\dfrac{4}{5}$.

所以$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=\dfrac{96}{25}$.

因AB的斜率为1，所以$(x_1-x_2)^2=(y_1-y_2)^2=\dfrac{96}{25}$，

所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

（2）因为焦点$F_1(-1，0)$到直线$x-y-1=0$的距离$d=\dfrac{|-1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

所以$S_{\triangle AF_1B}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8\sqrt{3}}{5}\times\sqrt{2}=\dfrac{8\sqrt{6}}{10}=\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$.

点评：求直线与圆锥曲线相交截得的弦长也是一类重要的题型，解决这类问题常用的方法是：设交点A与B的坐标，但设而不求，巧用韦达定理达到简化运算的目的.

【例12】已知双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$，经过点$M(2，1)$能否作一条直线l，使l与双曲线交于A，B，且点M是线段AB的中点．若存在这样的直线l，求出它的方程，若不存在，请说明理由.

解：假设直线l存在，设$A(x_1，y_1)$、$B(x_2，y_2)$，则

$x_1^2-\dfrac{y_1^2}{2}=1$，$x_2^2-\dfrac{y_2^2}{2}=1$，

两式相减得

$(x_1+x_2)(x_1-x_2)-\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$ …………①

又因为点$M(2，1)$平分弦AB，

所以$x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$，代入①，整理得

$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k_{AB}=4$，

故直线AB的方程为：$y-1=4(x-2)$，即$4x-y-7=0$.

由$\begin{cases}y=4x-7\\x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$消去$y$得　$14x^2-56x+51=0$，

因为$\varDelta=(-56)^2-4\times14\times51=280>0$，

这说明直线AB与双曲线相交且有2个不同的交点，故被点M平分的弦存在，所求直线l的方程为$4x-y-7=0$.

点评：解圆锥曲线的中点弦问题的简便方法是运用“点差法”．运用“点差法”解题的一般步骤是：设直线与圆锥曲线的交点坐标为（x_1，y_1），(x_2，y_2)，将两点坐标代入圆锥

曲线的方程并对得到的两式作差，由中点坐标消去 x_1+x_2，y_1+y_2，解出 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 的值，即为所求直线的斜率．值得注意的是，直线与双曲线是否相交要加以判断，有时被点平分的弦可能不存在，例如：本例中取 $M(1，1)$，其他条件不变，判别式小于 0．

【例 13】设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个顶点与抛物线 E：$x^2=4\sqrt{3}y$ 的焦点重合，F_1、F_2 分别是椭圆的左、右焦点，且椭圆的离心率 $e=\frac{1}{2}$，过椭圆右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 M、N 两点．

（1）求椭圆 C 的方程．

（2）若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-2$，求直线 l 的方程．

解：（1）因为抛物线 E：$x^2=4\sqrt{3}y$ 的焦点为（0，$\sqrt{3}$），所以椭圆的一个顶点为（0，$\sqrt{3}$），即 $b=\sqrt{3}$，又 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $c=1$，$a=2$．

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（2）因为椭圆的右焦点 $F_2(1，0)$，

当直线的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，与椭圆的交点 $M\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，$N\left(1,\ -\frac{3}{2}\right)$，

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}\neq-2$，所以不合题意；

当直线的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 得　$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$…………①．

设椭圆 C 与直线 l 的交点 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，由韦达定理得：

$$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}，\ x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}.$$

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=x_1\cdot x_2+k^2[x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)+1]$

$$=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}+k^2\left(\frac{4k^2-12}{3+4k^2}-\frac{8k^2}{3+4k^2}+1\right)=\frac{-5k^2-12}{3+4k^2}=-2,$$

解得 $k=\pm\sqrt{2}$，此时，方程①的 $\varDelta>0$，

所以直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{2}(x-1)$．

点评：求直线与圆锥曲线相交时，交点 M 与 N 的坐标满足某一个条件时，通过设 M 与 N 的坐标，应用韦达定理解决问题，注意验证判别式．

【例 14】已知双曲线的中心为原点，离心率为 2，一个焦点为 F（−2，0）．

（1）求双曲线的标准方程．

（2）Q 是双曲线上的点，且过 Q，F 的直线 l 与 y 轴交于点 M，若 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$，求直线 l 的方程.

解：（1）由已知得 $c=2$，又 $\dfrac{c}{a}=2$，故 $a=1$，$b^2=c^2-a^2=3$.

所以双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）由题意知直线 l 的斜率存在，设为 k，则直线方程为 $y=k(x+2)$，令 $x=0$，则 $y=2k$，所以 $M(0，2k)$.

设 $Q(x_1，y_1)$，则 $\overrightarrow{MQ}=(x_1，y_1-2k)$，$\overrightarrow{QF}=(-2-x_1，-y_1)$，又 $\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{QF}$，

所以 $(x_1，y_1-2k)=2(-2-x_1，-y_1)$，即 $(x_1，y_1-2k)=(-4-2x_1，-2y_1)$.

所以 $x_1=-4-2x_1$，$y_1-2k=-2y_1$，解得 $x_1=-\dfrac{4}{3}$，$y_1=\dfrac{2}{3}k$，故 $Q\left(-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3}k\right)$.

把点 Q 的坐标代入 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，

所以直线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{2}(x+2)$.

【例 15】如图 7-13 所示，已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$F_1$ 与 F_2 是双曲线与椭圆 $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 的公共焦点，P 为两曲线在第一象限内的一个交点，$A(2，0)$是双曲线与 x 轴的一个交点，求

（1）双曲线的标准方程.

（2）$\triangle F_1PF_2$ 的面积.

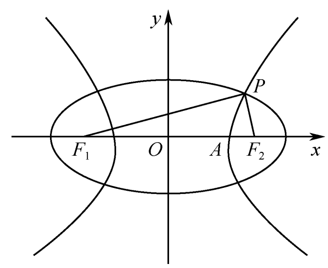


图 7-13

解：（1）因为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一个顶点是 $A(2，0)$.

由题意得 $\begin{cases}\dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{0^2}{b^2}=1\\ a^2+b^2=24-8\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=12\end{cases}$.

所求双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

（2）因为点 P 为双曲线和椭圆在第一象限内的一个交点，

所以由它们各自的定义得到方程组 $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=4\\ |PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{6}\end{cases}$，

解得 $|PF_1|=2\sqrt{6}+2$，$|PF_2|=2\sqrt{6}-2$．由（1）知 $|F_1F_2|=8$.

所以 $\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\times|PF_1|\times|PF_2|}=\dfrac{(2\sqrt{6}+2)^2+(2\sqrt{6}-2)^2-8^2}{2\times(2\sqrt{6}+2)\times(2\sqrt{6}-2)}=-\dfrac{1}{5}$，

则 $\sin\angle F_1PF_2=\sqrt{1-\cos^2\angle F_1PF_2}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6}+2)\times(2\sqrt{6}-2)\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$.

所求△F_1PF_2的面积为$4\sqrt{6}$.

【例 16】如图 7-14 所示，抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过焦点 F 的弦 AB 的长为 $4p$，求直线 AB 的倾斜角.

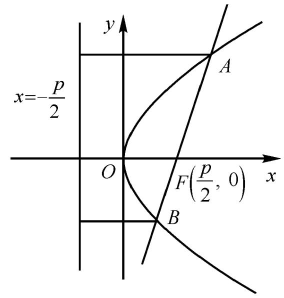


图 7-14

分析：过焦点的直线和抛物线相交求弦长（或利用弦长求其他元素）时，根据抛物线定义解答较为简单.

解：由 $y^2=2px\quad(p>0)$ 得焦点 $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$，

弦 AB 所在直线方程为 $y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

由方程组 $\begin{cases}y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)\\ y^2=2px\end{cases}$ 消去 y 得

$$k^2x^2-(k^2p+2p)x+\frac{1}{4}k^2p^2=0$$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{p(k^2+2)}{k^2}$.

由抛物线的定义得 $x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=|AF|+|BF|=|AB|=4p$，

所以 $x_1+x_2=3p$，即 $\frac{p(k^2+2)}{k^2}=3p$. 由此解得 $k=\pm1$.

设直线 AB 的倾斜角是α，则 $\tan\alpha=\pm1$，解得 $\alpha=45^\circ$ 或 135°，

因此直线倾斜角为 45° 或 135°.

点评：过抛物线焦点的直线与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=|x_1|+|x_2|+p$（焦点在 x 轴上）；或 $|AB|=|y_1|+|y_2|+p$（焦点在 y 轴上）.

【例 17】求抛物线 $y=x^2$ 上到直线 $y=2x-4$ 的距离最小的点的坐标，并求出这个距离.

解法一：设与 $y=2x-4$ 平行且与抛物线 $y=x^2$ 相切的直线方程为 $y=2x+b$.

由方程组 $\begin{cases}y=2x+b\\ y=x^2\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2x-b=0$.

由题意$\Delta=0$，即 $4+4b=0$，解得 $b=-1$，所求切线方程为 $y=2x-1$.

因为两平行直线 $y=2x-4$ 与 $y=2x-1$ 的距离为 $d=\frac{|-1+4|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

因此，抛物线 $y=x^2$ 到直线 $y=2x-4$ 的最小距离是 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

解方程组$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2 \end{cases}$得 切点坐标为$P(1,1)$.

则点$P(1,1)$就是抛物线$y=x^2$上到直线$y=2x-4$的距离最小的点.

解法二：设抛物线上点$P(x_0,x_0^2)$到直线$y=2x-4$的距离最小，则点P到直线$y=2x-4$的距离为

$$d=\frac{|2x_0-x_0^2-4|}{\sqrt{5}}=\frac{|x_0^2-2x_0+4|}{\sqrt{5}}=\frac{|(x_0-1)^2+3|}{\sqrt{5}},$$

所以当$x_0=1$时距离d有最小值，其值为$\frac{3\sqrt{5}}{5}$，$x_0^2=1$，所以$P(1,1)$.

点评：①求曲线上的点到直线的最小距离（直线与曲线相离时）可用相关的几何性质，如解法一用的是切线求解法；

②也可用一元二次函数求最值方法求得.

习 题 七

1．选择题

（1）过点$M(3,1)$且平行于向量$\boldsymbol{v}=(-1,-2)$的直线方程是（　　）.

（A）$2x-y-5=0$　　（B）$x+2y-5=0$

（C）$2x-y-7=0$　　（D）$x+2y-1=0$

（2）过点$P(1,2)$且垂直于向量$\boldsymbol{n}=(3,-4)$的直线方程为（　　）.

（A）$3x+4y+5=0$　　（B）$3x+4y-5=0$

（C）$3x-4y+5=0$　　（D）$3x-4y-5=0$

（3）若直线$x+ay+1=0$和$ax+4y-1=0$互相平行，则a等于（　　）.

（A）2　　（B）4　　（C）±2　　（D）±4

（4）两直线$ax-2y+3=0$和$2ax+ay-1=0$互相垂直，则a等于（　　）.

（A）0或1　　（B）1　　（C）1或2　　（D）2

（5）过点$P(1,2)$且与直线$x+3y-1=0$垂直的直线方程为（　　）.

（A）$3x-y+5=0$　　（B）$3x-y-1=0$

（C）$x+3y+5=0$　　（D）$x-3y+5=0$

（6）若直线$mx+3y+n=0$和$2x-3y+4=0$的交点在y轴上，则n的值是（　　）

（A）4　　（B）−4　　（C）±4　　（D）与m有关

（7）下列约束条件中，可以用图7-15中阴影部分表示的是（　　）.

（A）$\begin{cases}3x+4y-12\leqslant 0\\ x\geqslant 1\\ y\geqslant 0\end{cases}$

（B）$\begin{cases}3x+4y-12\leqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$

（C）$\begin{cases}3x+4y-12\geqslant 0\\ x\geqslant 1\\ y\geqslant 0\end{cases}$

（D）$\begin{cases}3x+4y-12\geqslant 0\\ x\geqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$

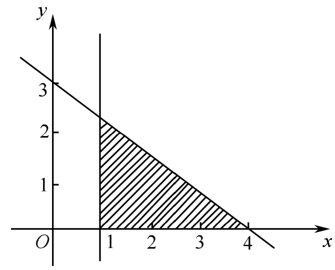


图 7-15

（8）已知过点 $P(-2，2)$且垂直于向量 $\boldsymbol{n}$=（3，4）的直线与圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-a=0$ 相切，则该圆的半径等于（　　）.

（A）4　　（B）$\dfrac{1}{9}$　　（C）4 或$\dfrac{1}{9}$　　（D）无法确定

（9）在不等式组$\begin{cases}2x+y-4<0\\ 3x-y+6>0\end{cases}$表示的平面区域内的点是（　　）.

（A）（3，1）　　（B）（1，2）　　（C）（−1，2）　　（D）（−2，1）

（10）若直线 $x+y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 相交于 A，B 两点，则$|AB|$=（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{2}$

（11）已知点 $M(a，b)$在圆$O:x^2+y^2=1$外，则直线 $ax+by=1$ 与圆 O 的位置关系是（　　）.

（A）相交　　（B）相切　　（C）相离　　（D）不确定

（12）椭圆 $5x^2+ky^2=5$ 的一个焦点是$(0，2)$，那么 k 的值是（　　）.

（A）－1　　（B）1　　（C）$\sqrt{5}$　　（D）$-\sqrt{5}$

（13）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率是方程 $2x^2-5x+2=0$ 的一个根，且直线 $ax+by-\sqrt{7}=0$ 与圆心在原点的单位圆相切，则椭圆的标准方程是（　　）.

（A）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（C）$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$

（14）过椭圆 $4x^2+y^2=1$ 的一个焦点 F_1 的直线与椭圆交于 A、B 两点，则 A、B 与椭圆的另一个焦点 F_2 构成的$\triangle ABF_2$ 的周长是（　　）.

（A）2　　（B）4　　（C）8　　（D）$2\sqrt{2}$

（15）若直线 $y=-2x+m$ 经过第二、三、四象限，则方程 $3x^2+my^2=1$ 表示的曲线是（　　）.

（A）直线　　（B）圆　　（C）椭圆　　（D）双曲线

（16）抛物线 $y^2=16x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 的渐近线的距离是（　　）.

（A）2　　（B）4　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）$2\sqrt{2}$

（17）过抛物线 $y^2=2x$ 焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A、B 两点，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　　）.

（A）$-\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{3}{4}$　　（C）-1　　（D）$-\frac{1}{4}$

（18）已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，过 F_1 且与椭圆长轴垂直的直线交椭圆于 A、B 两点，若△ABF_2 是正三角形，则这个椭圆的离心率是（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（19）设 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上，且满足 $\angle F_1PF_2=90°$，则△F_1PF_2 的面积是（　　）.

（A）1　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{5}$

（20）点 $(m，1)$ 和 $(1，m)$ 在直线 $3x-2y+5=0$ 的两侧，则 m 的取值范围是（　　）.

（A）$(-1，4)$　　（B）$(-4，1)$

（C）$(-\infty，-1)\cup(4，+\infty)$　　（D）$(-\infty，-4)\cup(1，+\infty)$

2．填空题

（1）已知点 $A(5，-4)$，$B(-3，2)$，则线段 AB 的垂直平分线方程为__________.

（2）已知点 $A(1,\ -1)$，点 $B(3,\ 5)$，点 P 是直线 $y=x$ 上动点，当 $|PA|+|PB|$ 的值最小时，点 P 的坐标是__________.

（3）过点 $(3，1)$ 且与圆 $x^2+y^2-10=0$ 相切的直线的方程是__________.

（4）若点 $(4，a)$ 到直线 $4x-3y=1$ 的距离不大于 3，则 a 的取值范围是__________.

（5）已知直线 l 与直线 $3x+2y-9=0$ 平行，且过直线 $x+2y=0$ 和 $x-y=3$ 的交点，则直线 l 的方程为__________.

（6）已知圆 C 的方程为 $x^2+y^2+4x-12y+39=0$，则与圆 C 关于点 $A(-3，3)$ 对称的圆的方程是__________.

（7）过 $A(2，4)$ 且与圆 $x^2+y^2=4$ 相切的直线方程为__________.

（8）已知 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+5\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\\x\leqslant 3\end{cases}$，则 $z=4x-y$ 的最小值是__________.

（9）已知过两点 $A(-m，6)$，$B(m+1，3m)$ 的直线 l 的斜率为 2，则 m 的值是__________.

（10）圆 $x^2+y^2-2x-8=0$ 上的点到直线 $x+2y-2=0$ 的最大距离是__________.

（11）经过两点 $A(0，5)$ 与 $B(-4，0)$ 的椭圆标准方程为__________.

（12）若方程 $\cos\alpha x^2+\sin\alpha y^2=1$ 表示双曲线，则角 α 所在的象限是__________.

（13）设斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $y^2=ax\ (a\neq 0)$ 的焦点 F，且和 y 轴交于点 A，若△OAF(O 为坐标原点)的面积为 4，则抛物线方程为_________．

（14）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$>0，$b$>0）的顶点把双曲线的焦距三等分，则双曲线的离心率等于___________．

（15）已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 两个焦点是 F_1，F_2，点 P 在该椭圆上．若$|PF_1|-|PF_2|=2$，则△PF_1F_2 的面积是_________．

（16）已知抛物线 C：$y^2=4x$ 上一点 P 到 y 轴的距离为 4，则点 P 到抛物线 C 的焦点的距离为_________．

（17）抛物线顶点在原点，焦点在 y 轴上，抛物线上一点 $M(m，-5)$到焦点的距离是 7，则抛物线方程为_________．

（18）双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}=1\quad(mn\neq 0)$ 离心率为 2，有一个焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合，则 mn 的值为_________．

（19）已知直线 l 过点 $P(2，-3)$，其倾斜角是直线 $2y-x-3=0$ 的倾斜角的 2 倍，则直线 l 的方程是__________________________________．

（20）已知 P 是圆 $x^2+y^2-2x=0$ 上的一个动点，则 P 到点 $A(5，3)$ 距离的最大值等于______．

3．已知直线 l：$x-y-2=0$，点 $M(1，1)$．求：

（1）点 M 关于直线 l 对称的点 M'.

（2）直线 l 关于点 M 对称的直线 l'.

4．已知直线 l：$y=x+m$，$m\in\mathbf{R}$.

（1）若以点 $M(2，0)$为圆心的圆与直线 l 相切于点 P，且点 P 在 y 轴上，求该圆的方程.

（2）若直线 l 关于 x 轴对称的直线为 l'，当直线 l'与抛物线 C：$x^2=4y$ 相切时，求 m 的值.

5．已知椭圆 C 的中心在原点，斜率为 1 且过椭圆 C 右焦点（$\sqrt{2}$，0）的直线 l 交椭圆与 A，B 两点，若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与向量 $\boldsymbol{n}=(3，-1)$共线.

（1）求直线 l 的方程.

（2）求椭圆 C 的方程.

6．已知椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，点$P\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，直线 l 过点 P 与椭圆交于 M、N 两点，若点 P 平分线段 MN，求直线 l 的方程.

7．如图 7-16 所示，F_1，F_2 分别是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0, b>0)$的左右两个焦点，且$a=\sqrt{2}b$，$M$ 为椭圆上一点，MF_2 垂直于 x 轴，过 F_2 且与 OM 垂直的直线交椭圆于 P，Q 两点.

（1）求椭圆的离心率.

（2）若△PF_1Q 的面积为$4\sqrt{3}$，求椭圆的标准方程.

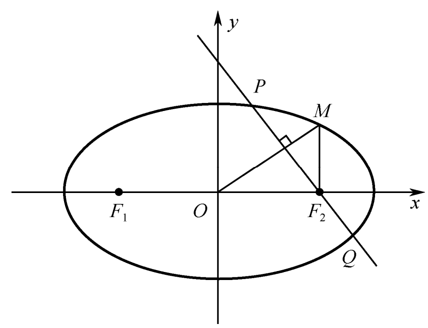


图 7-16

8．求与双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$有共同焦点，且过点$(3\sqrt{2},\ 2)$的双曲线标准方程.

9．已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，经过点$(0，\sqrt{2})$.

（1）求椭圆的标准方程.

（2）斜率为 1 的直线 l 交椭圆于 A，B 两点，若 $OA\perp OB$，求直线 l 的方程.

10．已知抛物线的顶点是坐标原点 O，焦点 F 在 x 轴的正半轴上，Q 是抛物线上的点，点 Q 到焦点 F 的距离是 1，且到 y 轴的距离是 $\frac{3}{8}$.

（1）求抛物线的标准方程.

（2）若直线 l 经过点 $M(3，1)$，与抛物线交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，求直线 l 的方程.

11．设 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$0<b<1$）的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与椭圆 E 相交于 A、B 两点，且 $|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$ 成等差数列．

（1）求 $|AB|$．

（2）若直线 l 的斜率为 1，求 b 的值．

12．已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$ 经过点 $(0,\ \sqrt{3})$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．

（1）求椭圆的方程．

（2）直线 l：$y=2x+m$ 与椭圆 C 相交于 A、B 两点，以线段 OA、OB 为邻边作平行四边形 $OAPB$，其中顶点 P 在椭圆 C 上，O 为坐标原点，求直线 l 的方程．

测 试 题 七

（时间为 120 分钟，满分 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分）

1．过点 $P(3,-5)$且平行于向量 $\boldsymbol{v}=(-1,-2)$的直线方程为（　　）．

（A）$2x-y-11=0$　　（B）$x+y+2=0$

（C）$2x-y-1=0$　　（D）$2x+y-1=0$

2．过点 $M(-2,3)$且垂直于向量 $\boldsymbol{n}=(2,-5)$的直线方程为（　　）．

（A）$2x+5y-11=0$　　（B）$2x-5y+19=0$

（C）$5x+2y=0$　　（D）$5x-2y+16=0$

3．过点 $P(-1,2)$且与直线 $x+3y-1=0$ 垂直的直线方程是（　　）．

（A）$3x-y+5=0$　　（B）$3x-y+1=0$

（C）$x+3y-5=0$　　（D）$x-3y+6=0$

4．关于 x，y 的二元二次方程 $x^2+y^2+a-1=0$ 表示圆的充要条件是（　　）．

（A）$a>1$　　（B）$a<1$　　（C）$a\geqslant1$　　（D）$a\leqslant1$

5．设 a，b，c 分别为△ABC 中∠A，∠B，∠C 对边的边长，则直线 $x\sin A+ay+c=0$ 与直线 $bx-y\sin B+\sin C=0$ 的位置关系是（　　）．

（A）平行　　（B）重合　　（C）垂直　　（D）相交但不垂直

6．过点 $P(1,2)$且倾斜角的余弦值为$\dfrac{3}{5}$的直线方程是（　　）．

（A）$4x-3y+2=0$　　（B）$4x+3y-10=0$

（C）$3x-4y+5=0$　　（D）$3x+4y-11=0$

7．直线 $3x+4y+D=0$ 与 $6x+8y-7=0$ 之间的距离是$\dfrac{13}{10}$，则 D 的值是（　　）．

（A）-10　　（B）-10 或 3

（C）-3　　（D）-3 或 10

8．如图 7-17 所示，已知变量 x，y 满足的约束条件是
$\begin{cases}x-y+4\geqslant0\\4x+5y-24\geqslant0\\7x+3y-42\leqslant0\end{cases}$，则目标函数 $z=2x-y$ 的最大值是（　　）．

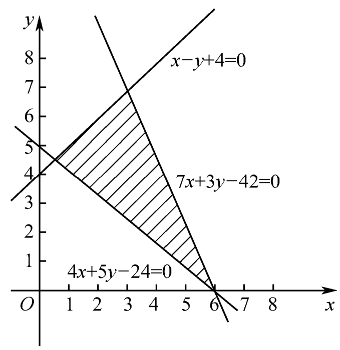


图 7-17

（A）10　　（B）-1

（C）16　　（D）12

9．设直线 $ax-by+2=0$ 的倾斜角为α，若 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 $a+b$ 的值等于（　　）．

（A）-1　　（B）0

（C）1　　　　（D）无法确定

10．圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 $3x+4y-25=0$ 的距离的最小值为（　　）.

（A）6　　（B）4　　（C）5　　（D）1

11．如果圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切于原点，那么（　　）.

（A）$D\neq0$，$E\neq0$，$F\neq0$　　（B）$D\neq0$，$E=0$，$F=0$

（C）$D=0$，$E\neq0$，$F=0$　　（D）$D=0$，$E=0$，$F\neq0$

12．已知过点 $P(2，2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2+y^2=5$ 相切，且与直线 $ax-y+1=0$ 垂直，则 a 的值为（　　）.

（A）2　　（B）1　　（C）$-\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{2}$

13．已知圆 $x^2+y^2-4x-4y=0$ 与 x 轴相交于 A，B 两点，则弦 AB 所对的圆心角的大小为（　　）.

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{2}$　　（D）$\frac{2\pi}{3}$

14．已知椭圆的焦点是 $F_1(-1，0)$，$F_2(1，0)$，P 是椭圆上的一个点，且$|F_1F_2|$是$|PF_1|$与$|PF_2|$的等差中项，则椭圆的标准方程是（　　）.

（A）$\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{4}=1$　　（B）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

（C）$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$　　（D）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

15．若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2，点 A 是椭圆上一点，若△AF_1F_2 为正三角形，则椭圆的离心率为（　　）.

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$\sqrt{3}-1$

16．可用方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两个根作为离心率的圆锥曲线是（　　）.

（A）椭圆与双曲线　　（B）双曲线与抛物线

（C）椭圆与抛物线　　（D）只有双曲线

17．实半轴长等于 $2\sqrt{5}$，并且经过点(5，−2)的双曲线方程为（　　）.

（A）$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$　　（B）$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$

（C）$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$　　（D）$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$

18．椭圆的中心在原点，且一个焦点为 F_1（0，$5\sqrt{2}$），直线 $y=3x-2$ 与椭圆相交于 A，B，AB 中点 M 的横坐标为 $\frac{1}{2}$，则椭圆的标准方程是（　　）.

（A）$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}=1$　　（B）$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{50}=1$

（C）$\dfrac{x^2}{75}+\dfrac{y^2}{25}=1$　　　　（D）$\dfrac{y^2}{75}+\dfrac{x^2}{25}=1$

19．O 为坐标原点，F 为抛物线 C：$y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点，P 为 C 上一点，若$|PF|=4\sqrt{2}$，则△POF 的面积为（　　）.

（A）2　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）4

20．若双曲线的右焦点与抛物线 $y^2=12x$ 的焦点相同，它们的离心率之和是 4，则该双曲线的标准方程是（　　）.

（A）$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1$　（B）$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{9}=1$　（C）$y^2-\dfrac{x^2}{8}=1$　（D）$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线与圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 相切，则 p 的值为_______.

22. 设 F_1 与 F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在椭圆上，且$\angle F_1PF_2=90^\circ$，则△F_1F_2P 的面积等于_________.

23．若 $kx^2+y^2=4$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，那么 k 的取值范围是__________.

24. 过双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点且与实轴垂直的弦的长度是 ___________.

25．如图 7-18 所示，把椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的长轴 AB 分成 8 等份，过每个分点作 x 轴的垂线分别交椭圆的上半部分于 P_1，P_2，P_3，…，P_7 七个点，F 是椭圆的一个焦点，则$|P_1F|+|P_2F|+\cdots+|P_7F|$ 的值是________.

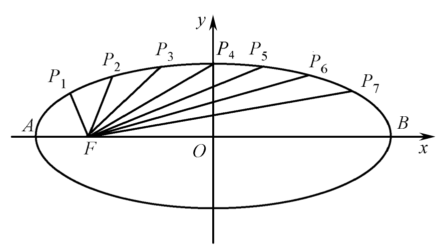


图 7-18

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 40 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为$\sqrt{3}$，焦点到渐近线的距离为$\sqrt{2}$.

（1）求双曲线 C 的标准方程.

（2）已知直线 l：$x-y+m=0$ 与双曲线 C 交于 A，B 两点，且线段 AB 的中点在圆 $x^2+y^2=5$ 上，求 m 的值.

27.（7 分）已知抛物线的顶点在原点，焦点在圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 的圆心 F 上.

（1）求抛物线的标准方程.

（2）若过抛物线的焦点且倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$ 的直线与抛物线分别交于 A，B 两点，求 $|AB|$.

28.（8 分）已知抛物线 $y^2=4x$，椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{m}=1$，它们有共同的焦点 F_2，并且相交于 P 与 Q 两点，F_1 是椭圆的另一个焦点，试求：

（1）m 的值.

（2）P 与 Q 两点的坐标.

（3）$\triangle PF_1F_2$ 的面积.

29.（9 分）如图 7-19 所示，已知在直角坐标系 xOy 中，点 M 到点 $F_1(-\sqrt{3},\ 0)$，$F_2(\sqrt{3},\ 0)$ 的距离之和是 4，点 M 的轨迹是 C，直线 $l: y=kx+\sqrt{2}$ 与轨迹 C 交于不同的两点 P 和 Q.

（1）求轨迹 C 的方程.

（2）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求 k 的值.

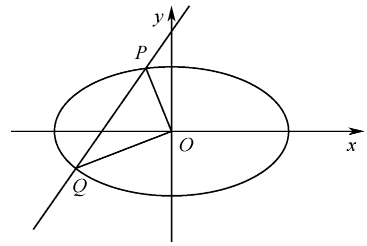


图 7-19

30.（9 分）如图 7-20 所示，已知双曲线的中心在坐标原点 O，焦点分别是 $F_1(-2,\ 0)$、$F_2(2,\ 0)$，且双曲线经过点 $P(2,\ 3)$.

（1）求双曲线的标准方程.

（2）设点 A 是双曲线的右顶点，若直线 l 平行于直线 AP，且 l 与双曲线相交于 M、N 两点，$|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}|=4$，试求直线 l 的方程.

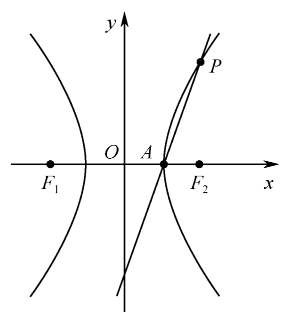


图 7-20

一个人的成功不取决于他的智慧，而是毅力。顽强的毅力可以征服世界上任何一座高峰。

第八章
立 体 几 何

【复习要求】

立体几何是高中阶段数学学习的重要内容之一，它主要研究的是空间图形的位置关系及其性质．通过本章内容的学习，可以提高学生的空间想象能力和逻辑推理能力．本章内容也是春季高考的主要考试内容之一．对本章内容的复习建议如下：

1．了解“多面体、旋转体”和“棱柱、棱锥、圆柱、圆锥、球”的概念．

2．掌握柱体、锥体、球的表面积和体积公式，能用公式计算简单组合体的表面积和体积．

3．了解平面的基本性质．

4．理解空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系．

5．理解直线与直线、直线与平面、平面与平面的两种位置（平行、垂直）关系的判定与性质．

6．了解点到平面的距离、直线到平面的距离、平行平面间的距离的概念，并会解决相关的距离问题．

7．了解异面直线所成的角、直线与平面所成的角及二面角的概念，并会解决相关的简单问题．

【知识框图】

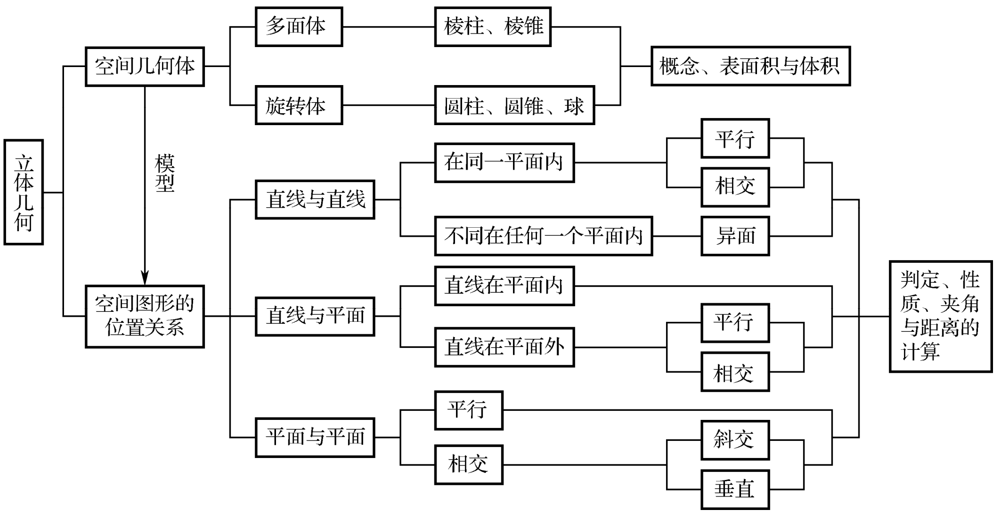


图 8-1

【知识要点】

1．多面体

（1）由若干个平面多边形围成的几何体叫作多面体．

（2）棱柱

①棱柱的底面、侧面、侧棱、高．

②斜棱柱、直棱柱、正棱柱、平行六面体、直平行六面体、正方体．

③长方体的长、宽、高分别是 a，b，c，则其对角线的长是 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ．即：长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上的三条棱长的平方和．

（3）棱锥

①棱锥的侧面、底面（或底）、顶点、高．

②正棱锥、正棱锥的斜高．

2．旋转体

（1）由一条曲线绕一条定直线旋转一周所形成的几何体叫作旋转体．把这条定直线叫作旋转体的轴．这条曲线叫作旋转体的母线．

（2）圆柱、圆锥，圆柱和圆锥的高、底面、侧面．

（3）球

①球面、球体、球心、球的半径．

②球的大圆、球的小圆、两点的球面距离．

3．空间几何体的表面积与体积

（1）面积

①$S_{直棱柱侧}=ch$，$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'$.

②$S_{圆柱侧}=cl=2\pi rl$，$S_{圆锥侧}=\frac{1}{2}cl=\pi rl$，$S_{球}=4\pi R^2$.

（2）体积

①$V_{长方体}=abc$ 或 $V_{长方体}=Sh$.

②$V_{柱体}=Sh$，$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$.

③$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

4．平面

（1）平面的基本性质

①如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

②经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

③如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过这个点的公共直线.

（2）平面基本性质的推论

推论 1　经过一条直线和直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

5．空间两条直线的位置关系

（1）相交、平行、异面直线.

（2）平行直线

过直线外一点有且只有一条直线和这条直线平行.

平行于同一条直线的两条直线互相平行.

（3）空间四边形

空间四边形的顶点、边、对角线.

（4）异面直线

①过平面内一点与平面外一点的直线，和这个平面内不经过该点的直线是异面直线.

②若 a，b 为异面直线，则经过空间任意一点 O，作直线 $a'/\!/a$，$b'/\!/b$，则直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫作异面直线 a，b 所成的角．如果两条异面直线所成的角是直角，则两条异面直线互相垂直.

6．直线与平面的位置关系（直线与平面平行、直线与平面相交、直线在平面内）

（1）直线与平面平行

①判定定理

如果平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

②性质定理

如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就

和两平面的交线平行.

（2）直线与平面相交

①一条直线 l 与一个平面α有且只有一个公共点，我们就说直线 l 与平面α相交.

②如果直线 l 与平面α内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面α互相垂直，记作 $l\perp\alpha$. 直线 l 叫作平面α的垂线，平面α叫作直线 l 的垂面，直线与平面垂直时，它们唯一的公共点 O 叫作垂足.

③过一点有且只有一条直线与已知平面垂直，过一点有且只有一个平面与已知直线垂直.

④平面的垂线上任意一点到垂足间的线段，叫作这个点到这个平面的垂线段，垂线段的长度叫作这个点到平面的距离.

⑤直线与平面垂直

判定定理：如果一条直线与一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线与这个平面垂直.

推论：在两条平行线中，如果有一条直线垂直于一个平面，那么另一条直线也垂直于这个平面.

性质定理：如果两条直线同时垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

⑥平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫作这条直线和这个平面所成的角.

7. 平面与平面的位置关系

（1）平面与平面平行

①平面与平面平行的判定

定理：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

推论：如果一个平面内有两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条直线，则这两个平面平行.

②性质定理

如果两个平行平面同时与第三个平面相交，则它们的交线平行.

③两平行平面的距离

与两个平行平面都垂直的直线，叫作平行平面的公垂线，公垂线夹在这两个平行平面间的线段，叫作平行平面的公垂线段. 公垂线段的长度叫作两个平行平面间的距离.

（2）二面角

①从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作二面角. 这条直线叫作二面角的棱，这两个半平面叫作二面角的面.

②在二面角的棱上任取一点，在二面角的两个半平面内分别作垂直于棱的射线，则两条射线所构成的角叫作二面角的平面角. 平面角是直角的二面角叫作直二面角.

（3）两个平面垂直

①判定定理

如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

②性质定理

如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）对于下列四个命题：

①直平行六面体就是长方体；

②有两个相邻的侧面都是矩形的棱柱是直棱柱；

③有一个面是多边形，其余各面是三角形的几何体是棱锥；

④底面是正方形的棱柱是正棱柱.

其中正确命题的个数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

分析：根据多面体的有关定义，进行概念辨析．长方体是底面为矩形的直平行六面体，①错误；若棱柱有两个相邻的侧面都是矩形，则侧棱垂直于底面，②正确；构成棱锥的侧面三角形必须有公共的顶点，③错误；底面是正方形的直棱柱是正棱柱，④错误．故选（A）.

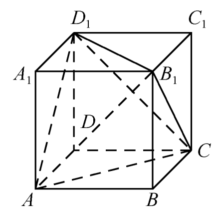


图 8-2

（2）如图 8-2 所示，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，三棱锥 $D_1\text{-}AB_1C$ 的表面积与正方体的表面积的比等于（　　）.

（A）$1:\sqrt{2}$　　（B）$1:\sqrt{3}$

（C）$1:2$　　（D）$\sqrt{3}:2$

分析：设正方体的棱长为 1，则三棱锥 $D_1\text{-}AB_1C$ 的表面是四个边长为 $\sqrt{2}$ 的正三角形，其表面积等于 $4\times\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=2\sqrt{3}$.

正方体的表面积等于 6．于是 $2\sqrt{3}:6=\sqrt{3}:3=1:\sqrt{3}$，故选（B）.

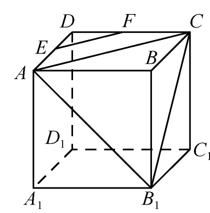


图 8-3

（3）如图 8-3 所示，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，点 E 为 AD 的中点，点 F 在 CD 上，若 EF//平面 AB_1C，则线段 EF 的长度等于（　　）.

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{6}$

（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

分析：因为 EF//平面 AB_1C，$EF\subset$平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$平面 $AB_1C=AC$，所以 $EF//AC$．又因为 E 是 AD 的中点，所以 F 是 CD 的中点，即 EF 是$\triangle ADC$ 的中位线，所以 $EF=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，故选（A）.

（4）平面 α 截球 O 的球面所得圆的半径为 1，球心 O 到平面α的距离为$\sqrt{2}$，则此球的体积为（　　）.

（A）$\sqrt{6}\pi$　　（B）$4\sqrt{6}\pi$　　（C）$4\sqrt{3}\pi$　　（D）$6\sqrt{3}\pi$

分析：设球的半径为 R，则 $R^2=(\sqrt{2})^2+1^2$，所以 $R=\sqrt{3}$，则球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，故选（C）.

（5）下列说法正确的是（　　）.

（A）过空间两条直线有且只有一个平面

（B）过空间三点有且只有一个平面

（C）空间两平面α和β有且只有一条公共直线

（D）过一条直线和这条直线外的一个点有且只有一个平面

分析：本题主要考查平面的基本性质及推论．空间两条异面直线无法确定一个平面，（A）错误；空间三点共线时，则经过这三点有无数个平面，（B）错误；空间两个平面平行时，这两个平面没有公共直线，（C）错误．（D）正确．

（6）空间中垂直于同一条直线的两条直线的位置关系有（　　）．

（A）相交　　（B）平行　　（C）异面　　（D）以上三种情况都有

分析：如图 8-4 所示，在立方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，$A'B'$与$B'C'$都垂直于$B'B$，且$A'B'$与$B'C'$是两条相交直线；$B'C'$与BC都垂直于$B'B$，且$B'C'$与BC是两条平行直线；$A'B'$与BC都垂直$B'B$，且$A'B'$与BC是两条异面直线．所以空间中垂直于同一条直线的两条直线的位置关系有：相交、平行、异面，故选（D）．

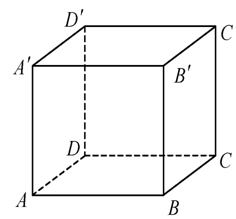


图 8-4

点评：我们在处理空间中线线关系、线面关系及面面关系时，可以充分利用熟悉的几何体，特别是要注意立方体的应用．在以上例题的解答中，用到了一种数学方法，即构造法．在解答立体几何题目时，我们可以通过构造满足条件的几何体，化难为易，正方体、长方体、四面体等简单几何体，都是很重要的几何模型．

（7）“直线l∥平面α”是“直线l在平面α外”的（　　）．

（A）必要但不充分条件　　（B）充分但不必要条件

（C）充要条件　　（D）既不是充分条件也不是必要条件

分析：直线l∥平面α，则l在平面α外；但l在平面α外，直线l还可能与平面α相交．故选（B）．

（8）下列各命题中是假命题的为（　　）．

（A）平行于同一平面的两直线平行

（B）平行于同一条直线的两条直线平行

（C）过平面外一点有无数条直线和该平面平行

（D）过平面外一点有无数个平面和该平面垂直

分析：平行于同一平面的两条直线的位置关系是：可能相交，可能平行，可能异面．如图 8-4，在正方体$ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，直线$A'B'$与$B'C'$相交且都平行平面AC，A是假命题，故选（A）．

（9）下列命题中正确的是（　　）．

（A）若两个平面都垂直于同一个平面，则这两个平面互相平行

（B）两条平行直线与同一平面所成角相等

（C）若一个平面内不共线的三点到另一个平面的距离相等，则这两个平面互相平行

（D）若一条直线和一个平面相交，且和这个平面内的无数条直线垂直，则这条直线和这个平面垂直

分析：可利用正方体考查所给 4 个命题，（A）（C）（D）均不正确，故选（B）.

（10）下列命题：

①平行于同一平面的两个平面互相平行

②如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直

③如果一条直线与平面的两条直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面

④如果两条平行线中有一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面

其中，正确命题的个数为（　　）.

（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

分析：本题综合考查判定定理及性质定理．只有③是错误的，故选（B）.

（11）下列说法正确的是（　　）.

（A）如果两条直线与同一个平面所成角相等，那么这两条直线平行

（B）若平面内的两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行

（C）经过平面的一条垂线有且只有一个平面与已知平面垂直

（D）经过平面外一点有且只有一条直线与已知平面垂直

分析：此题主要考查对直线与平面、平面与平面的位置判定定理的理解，选（D）.

（12）若α，β表示平面，m，n 表示直线，P 表示点，则下列命题错误的是（　　）.

（A）$\alpha\cap\beta=n$，$m\subset\beta$，$m\parallel\alpha\Rightarrow m\parallel n$

（B）$m\subset\beta$，$n\subset\beta$，$m\cap n=P$，$m\parallel\alpha$，$n\parallel\alpha\Rightarrow\beta\parallel\alpha$

（C）$m\perp\alpha$，$m\subset\beta\Rightarrow\beta\perp\alpha$

（D）$m\perp\alpha$，$m\perp n\Rightarrow n\parallel\alpha$

分析：选项（A）是直线与平面平行的性质定理，（B）是平面与平面平行的判定定理，（C）是平面与平面垂直的判定定理，选项（D），直线 n 可以在平面α 内，故选（D）.

（13）已知二面角α-AB-β为 30°，点 $P\in$平面α，过 P 点作 $PC\perp\beta$于 C，$PC=1$，则点 C 到 AB 的距离为（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\sqrt{3}$

（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

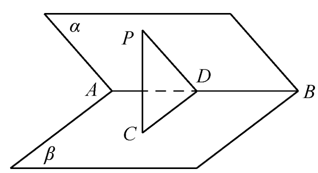


图 8-5

分析：如图 8-5 所示，$PC\perp\beta$，则 $PC\perp AB$，过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，则 $AB\perp$平面 PCD，所以 $PD\perp AB$. 所以$\angle PDC$ 为二面角α-AB-β 的平面角，$\angle PDC=30°$．连接 PD，由已知 $PC=1$，所以 $PD=2$，由勾股定理得 $CD=\sqrt{3}$．故选（B）.

（14）如图 8-6 所示，直线 PA 垂直于圆 O 所在的平面，$\triangle ABC$ 内接于圆 O，且 AB 为圆 O 的直径，点 M 为线段 PB 的中点．现有以下命题：① $BC\perp PC$；②OM//平面 APC；③点 B 到平面 PAC 的距离等于线段 BC 的长．其中真命题的个数为（　　）.

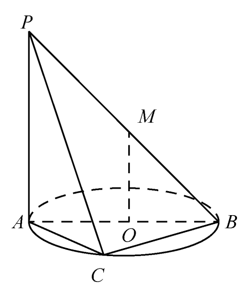


图 8-6

（A）3　　（B）2

（C）1　　（D）0

分析：①②③都正确，故选（A）.

（15）如图 8-7 所示，A，B，C，D 为空间四点，在 Rt△ABC 中，$AB=2$，$AC=BC=\sqrt{2}$，等边△ADB 以 AB 为轴旋转，当平面 $ADB\perp$平面 ABC 时，$CD=$（　　）.

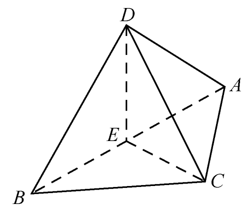


图 8-7

（A）$\sqrt{3}$　　（B）2

（C）$\sqrt{5}$　　（D）1

分析：因为 $AC=BC=\sqrt{2}$，点 E 为 AB 的中点，连接 CE，DE，则 $CE\perp AB$，$DE\perp AB$，又因为平面 $ADB\perp$平面 ABC，平面 $ADB\cap$平面 $ABC=AB$，则 $DE\perp EC$，在 Rt△AEC 中，$AE=\dfrac{1}{2}AB=1$，则 $EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=1$，同理可求得 $DE=\sqrt{3}$，在 Rt△DEC 中，$CD=\sqrt{EC^2+DE^2}=2$，故选（B）.

【例 2】填空题

（1）棱长为 1 的正方体的所有顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为_________.

分析：把一个多面体的所有顶点放在球面上即为球的外接问题．此时球心到多面体的顶点的距离等于球的半径．如图 8-8 所示，由题意知球的直径的长等于正方体对角线的长，设球的半径为 R，则有 $2R=\sqrt{3}$，所以 $S_{球}=3\pi$.

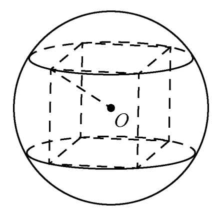


图 8-8

（2）若一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，则这个圆柱的全面积与侧面积的比是__________.

分析：设圆柱底面半径为 1，则侧面展开图的正方形边长为 2π，圆柱的侧面积等于 $4\pi^2$，全面积为$\pi+\pi+4\pi^2=2\pi+4\pi^2$，所以全面积与侧面积的比等于$\dfrac{1+2\pi}{2\pi}$.

（3）A，B，C 是平面α外的不共线三点，且它们到α的距离都相等，则由 A，B，C 三点所确定的平面β与α的位置关系是______.

分析：①当 A，B，C 三点在平面α同一侧时，平面β与α平行；②当 A，B，C 三点在平面α的异侧时，平面β与α相交.

点评：同这个问题相类似的还有：如果平面外有两点到该平面的距离相等，那么过这两点的直线与这个平面的位置关系是相交或平行.

（4）如图 8-9 所示，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，则直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为_______.

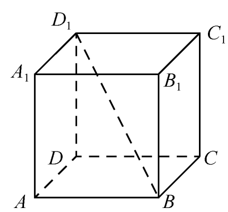


图 8-9

分析：设正方体边长为 1，则直线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成角为$\angle D_1BD$，在 Rt△D_1DB 中，$D_1D=1$，$BD_1=\sqrt{3}$，$\sin\angle D_1BD=\dfrac{D_1D}{BD_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（5）如图 8-10 所示，正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面成 60° 的二面角，则异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是________.

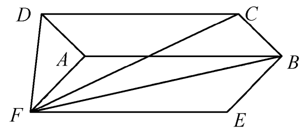


图 8-10

分析：$\angle DAF$ 为二面角的平面角，$\angle DAF=60°$，设 $AD=a$，则 $DF=a$，又因为 $AB\perp$平面 ADF，所以 $CD\perp$平面 ADF，$CD\perp DF$，所以 $CF=\sqrt{2}\,a$，又在$\triangle BCF$ 中，$BC=a$，$BF=\sqrt{2}\,a$，根据余弦定理可得 $\cos\angle CBF=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，即异面直线 AD 与 BF 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

（6）把边长为 1 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，则两顶点 B，D 间的距离为_________.

分析：如图 8-11（1）所示中，设 AC，BD 相交于点 O，则 $DO\perp AC$，且 $BO=DO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，如图 8-11（2）所示把正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，$\angle BOD=90°$，在 Rt$\triangle DOB$ 中，$BD=\sqrt{BO^2+DO^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$.

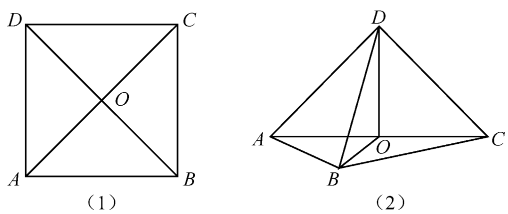


图 8-11

【例 3】如图 8-12 所示，已知 P 为矩形 $ABCD$ 所在平面外一点，$PA\perp$平面 $ABCD$，E，F 分别是 AB，PC 的中点.

求证：EF//平面 PAD.

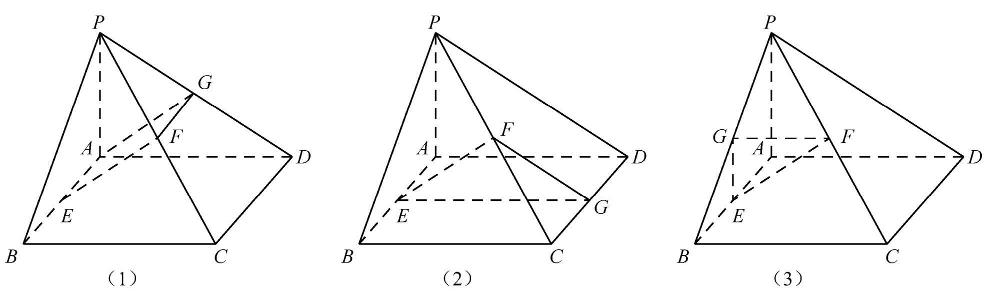


图 8-12

证明一：如图 8-12（1）所示，设 G 为 PD 的中点，连接 FG，AG，在$\triangle PCD$ 中，由中位线定理得 $GF//DC$ 且 $GF=\dfrac{1}{2}DC$. 又因为四边形 $ABCD$ 是矩形，点 E 是 AB 的中点，所以 $AE//DC$ 且 $AE=\dfrac{1}{2}DC$. 故 $GF//AE$ 且 $GF=AE$，所以四边形 $AEFG$ 为平行四边形，故 $EF//AG$，

$AG\subset$ 平面 PAD，$EF\not\subset$ 平面 PAD，所以 $EF//$平面 PAD.

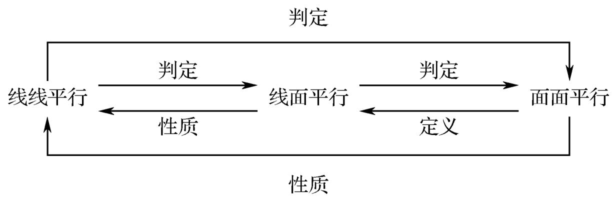
证明二：如图 8-12（2）所示，设点 G 为 CD 的中点，连接 FG，EG，在$\triangle PCD$ 中，由中位线定理得 $FG//PD$，又因为四边形 $ABCD$ 是矩形，点 E，G 是 AB，CD 的中点，所以 $EG//AD$，$EG\cap FG=G$，$PD\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，所以平面 $EFG//$平面 PAD，$EF\subset$ 平面 EFG，所以 $EF//$平面 PAD.

证明三：如图 8-12（3）所示，类似证明二可通过证明平面 $EFG//$平面 PAD，来证得 $EF//$平面 PAD.

点评：①应用线面平行的判定定理证明线面平行时，关键是在平面内找一条直线与已知直线平行.

②证明线面平行还可通过证明面面平行来证明.

注：平行问题的转化关系



【例 4】如图 8-13 所示，在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，底面边长为 $\sqrt{2}$，侧棱长为 1.

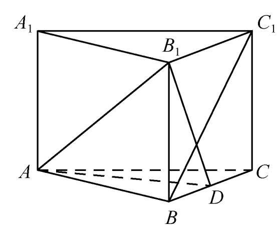


图 8-13

求证：$AB_1\perp BC_1$.

证明：取 BC 中点 D，连接 AD，B_1D，

由正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 知，平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1.

又 D 为$\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，故 $AD\perp BC$，

于是 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1，$BC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AD\perp BC_1$，

在矩形 BCC_1B_1 中，$BC=\sqrt{2}$，$BB_1=1$，

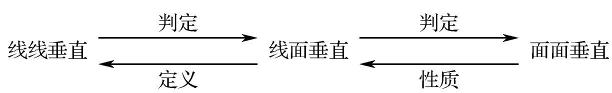
所以　$\mathrm{Rt}\triangle CBC_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle BB_1D$，

$\angle CBC_1=\angle BB_1D$，$BC_1\perp DB_1$，

$AD\cap DB_1=D$，所以 $BC_1\perp$ 平面 ADB_1，又因为 $AB_1\subset$ 平面 ADB_1，

所以 $AB_1\perp BC_1$.

注：垂直问题的转化关系



【例 5】如图 8-14（1）所示，在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，E 是 AB 的中点.

（1）求 BA' 与 CC' 所成角的度数.

（2）求 BA' 与 CB' 所成角的度数.

（3）求 $A'E$ 与 CB' 所成角的余弦值.

解：（1）由 $BB'//CC'$，可知$\angle B'BA'$就是异面直线 BA'与 CC'所成角，

所以异面直线 BA'与 CC'的所成角为 $45°$.

（2）如图 8-14（2）所示，连接 CD'，$B'D'$，

则 $BA'//CD'$，$\angle B'CD'$就是异面直线 BA'与 CB'的所成角.

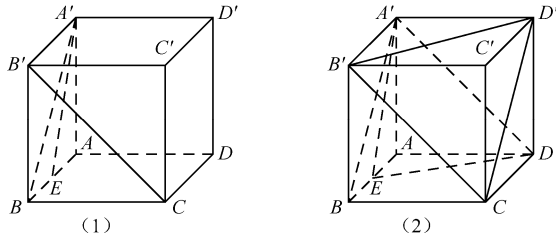


图 8-14

由$\triangle CB'D'$为等边三角形，$\angle B'CD'=60°$，

所以 BA'与 CB'的所成角为 60°.

（3）连接 $A'D$，DE，

则 $A'D // CB'$，$\angle DA'E$ 就是异面直线 $A'E$ 与 CB'的所成角.

设 $AA'=2$，则 $AE=1$，$A'E=DE=\sqrt{5}$，$A'D=2\sqrt{2}$，

在$\triangle DA'E$ 中，

$$\cos\angle DA'E=\frac{A'D^2+A'E^2-DE^2}{2A'D\cdot A'E}=\frac{8+5-5}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

所以 $A'E$ 与 CB'所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

点评：求异面直线所成的角的方法

①利用定义转化为平面角，对于异面直线所成的角，可固定一条，平移一条，或者两条同时平移到某个特殊的位置，顶点选在特殊的位置上.

②把这个平面角置于一个平面图形（如三角形）中，通过解平面几何来求角的大小. 无论用哪种方法都应注意到异面直线所成角的范围，以及利用三角形中位线的性质、平行四边形的性质等知识进行直线的平移.

【例 6】如图 8-15 所示，已知 $SA\perp$正方形 $ABCD$ 所在平面，O 为 AC 与 BD 的交点，$AB=2\sqrt{2}$，$SC=5$.

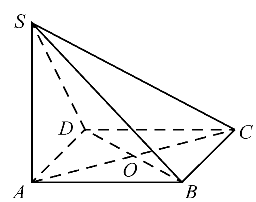


图 8-15

（1）求证：$BD\perp SC$.

（2）求证：平面 $SBC\perp$平面 SAB.

（3）求点 S 到平面 $ABCD$ 的距离.

（4）求点 S 到直线 BC 的距离.

（5）求直线 SC 与 AB 所成角的余弦值.

（6）求直线 SB 与平面 $ABCD$ 所成的角的正切值.

（7）求平面 SAB 与平面 SAC 所成的二面角的度数.

分析：此题考查内容较多，涉及线面垂直的判定定理、性质定理，平面与平面垂直的判定，点到平面的距离，点到直线的距离，两条异面直线所成的角，斜线与平面所成的角及二面角的大小问题.

（1）证明：因为 $SA\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $SA\perp BD$，因为 $ABCD$ 是正方形，所以 $BD\perp AC$，又因为 $AC\cap SA=A$，所以 $BD\perp$平面 SAC，而 $SC\subset$平面 SAC，所以 $BD\perp SC$.

（2）证明：因为 $SA\perp$平面 $ABCD$，所以 $SA\perp BC$，又因为 $BC\perp AB$，而 $SA\cap AB=A$，所以 $BC\perp$平面 SAB．因为 $BC\subset$平面 SBC，所以平面 $SBC\perp$平面 SAB．

（3）解：因为 $SA\perp$平面 $ABCD$，所以 $SA\perp AC$，$AC=\sqrt{2}AB=4$，

因为 $SC=5$，所以 $SA=3$．

（4）解：因为 $BC\perp$平面 SAB，所以 $BC\perp SB$，所以 SB 为 S 到 BC 的距离．

$SB=\sqrt{SC^2-BC^2}=\sqrt{5^2-8}=\sqrt{17}$，即点 S 到 BC 的距离为 $\sqrt{17}$．

（5）解：因为 $AB\,//\,DC$，所以$\angle SCD$ 是异面直线 SC 与 AB 所成的角．

因为 $AB\perp$平面 SAD，$AB\,//\,DC$，所以 $DC\perp$平面 SAD．

所以 $DC\perp SD$，$DC=2\sqrt{2}$，$SC=5$，所以 $\cos\angle SCD=\dfrac{DC}{SC}=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$．

（6）解：因为 $SA\perp$平面 $ABCD$，所以$\angle SBA$ 是直线 SB 与平面 AC 所成的角．

因为 $SA=3$，$AB=2\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle SBA=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$．

（7）解：因为 $AB\perp SA$，$AB\subset$平面 SAB，$AC\perp SA$，$AC\subset$平面 SAC．平面 $SAB\cap$平面 $SAC=SA$，所以$\angle CAB$ 是二面角 $C\text{-}SA\text{-}B$ 的平面角．

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以$\angle CAB=45°$．

所以平面 SAB 与平面 SAC 所成的二面角的度数为 $45°$．

点评：求线面角、二面角的常用方法

①直线与平面所成的角：如果直线与平面垂直，那么直线与平面所成的角为 $90°$；如果直线与平面不垂直，根据定义先找到直线与直线在平面内的射影所成的角，并指出它就是直线与平面所成的角，要归结到一个三角形中求解，注意范围不超过 $90°$．

②二面角：根据定义先找到二面角的平面角，再归结到一个三角形中求解，其范围是 $[0°，180°]$．

【例 7】如图 8-16 所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$CD=2AB$，平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，$PA\perp AD$，E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点．求证：

（1）$AB\perp$平面 PAD．

（2）$BE//$平面 PAD．

（3）平面 $BEF\perp$平面 PCD．

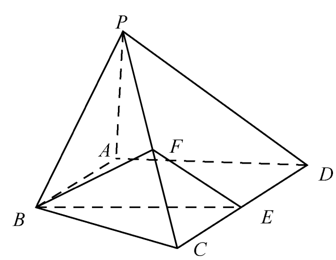


图 8-16

证明：（1）因为平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$底面 $ABCD=AD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，

又因为 $AB\perp AD$，所以 $AB\perp$平面 PAD.

（2）因为 $CD=2AB$，E 是 CD 的中点，所以 $AB=DE$，又因为 $AB//CD$，所以四边形 $ABED$ 是平行四边形，所以 $BE//AD$. 又因为 $AD\subset$平面 PAD，$BE\not\subset$平面 PAD，所以 $BE//$平面 PAD.

（3）由（1）得 $AB\perp$平面 PAD，又 $AB//CD$，所以 $CD\perp$平面 PAD.

因为 E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点，所以 $EF//PD$，又因为 $BE//AD$，$EF\cap BE=E$，所以平面 $BEF//$平面 PAD. 所以 $CD\perp$平面 BEF，又因 $CD\subset$平面 PCD，所以平面 $BEF\perp$平面 PCD.

【例 8】如图 8-17（1）所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle B=90^\circ$，$DC/\!/AB$，$BC=CD=\frac{1}{2}AB=2$，G 为线段 AB 的中点，将$\triangle ADG$ 沿 GD 折起，使平面 $ADG\perp$平面 $BCDG$，得到如图 8-17（2）所示的几何体 A-$BCDG$．

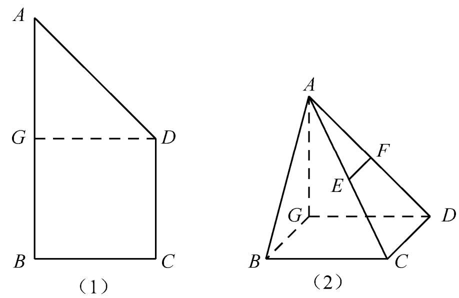


图 8-17

（1）若 E，F 分别为线段 AC，AD 的中点，求证：$EF/\!/$平面 ABG．

（2）求证：$AG\perp$平面 $BCDG$．

（3）求 $V_{C\text{-}ABD}$ 的值．

（1）证明：依题意，折叠前后 CD，BG 位置关系不改变，所以 $CD/\!/BG$．

因为 E，F 分别为线段 AC，AD 的中点，所以在$\triangle ACD$ 中，$EF/\!/CD$，所以 $EF/\!/BG$．

又 $EF\not\subset$平面 ABG，$BG\subset$平面 ABG，所以 $EF/\!/$平面 ABG．

（2）证明：将$\triangle ADG$ 沿 GD 折起后，AG，GD 位置关系不改变，所以 $AG\perp GD$，

又平面 $ADG\perp$平面 $BCDG$，平面 $ADG\cap$平面 $BCDG=GD$，$AG\subset$平面 AGD，

所以 $AG\perp$平面 $BCDG$．

（3）解：由已知得 $BC=CD=AG=2$，

又由（2）得 $AG\perp$平面 $BCDG$，即点 A 到平面 $BCDG$ 的距离 $AG=2$，

所以 $V_{C\text{-}ABD}=V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AG=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)\times2=\frac{4}{3}$．

习 题 八

1．选择题

（1）给出下列命题，其中正确的个数是（　　）．

①半圆以其直径为轴旋转所成的曲面是球；

②到定点距离等于定长的所有点的集合是球；

③球的小圆的圆心与球心的连线垂直于这个小圆所在的平面；

④经过球面上不同的两点只能做一个大圆．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）下列命题中，不正确的是（　　）．

（A）棱长都相等的长方体是正方体

（B）有两个相邻侧面为矩形的棱柱为直棱柱

（C）有两个侧面与底面垂直的棱柱为直棱柱

（D）底面为平行四边形的四棱柱叫作平行六面体

（3）若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个圆锥的全面积等于（　　）.

（A）3π　　（B）$3\sqrt{3}\pi$　　（C）6π　　（D）9π

（4）如图 8-18 所示，高为 3 的直棱柱 $ABC\text{-}A'B'C'$ 的底面是边长为 1 的正三角形，则三棱锥 $B'\text{-}ABC$ 的体积等于（　　）.

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$

（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

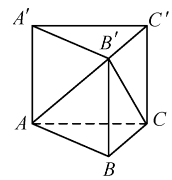


图 8-18

（5）以边长为 1 的正方形的一边所在直线为旋转轴旋转一周，所得几何体的侧面积等于（　　）.

（A）4π　　（B）3π　　（C）2π　　（D）π

（6）正四棱锥的高为 10，侧棱与底面所成的角为 45°，它的体积是（　　）.

（A）4000　　（B）$\dfrac{4000}{3}$　　（C）$\dfrac{2000}{3}$　　（D）2000

（7）直线 l_1 和平面α所成的角为θ_1，直线 l_2 与平面α 所成的角为θ_2，若$\theta_1=\theta_2$，则 l_1 与 l_2 关系是（　　）.

（A）相交　　（B）异面

（C）平行　　（D）以上情况都有可能

（8）在空间，下列命题中正确的个数为（　　）.

①平行于同一直线的两条直线平行；②垂直于同一直线的两条直线平行；

③平行于同一平面的两条直线平行；④垂直于同一平面的两条直线平行.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（9）给出下列命题：

①垂直于三角形两条边的直线必垂直于第三边；

②如果两个平面垂直于同一条直线，那么这两个平面平行；

③如果一个平面内有两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

④如果两条直线垂直于同一个平面，那么这两条直线平行.

其中，正确命题的个数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（10）下列说法正确的是（　　）.

（A）过直线外一点可以作无数条直线与已知直线成异面直线

（B）过直线外一点只可以作一条直线与已知直线垂直

（C）过两条异面直线中的一条，可作无数个平面与另一条直线平行

（D）过两条异面直线外一点有且仅有一个平面与两条异面直线都平行

（11）如图 8-19 所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 分别是 BC、BB_1 的中点，则下列直线中与直线 EF 相交的是（　　）.

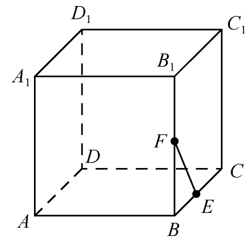


图 8-19

（A）直线 AA_1　　（B）直线 B_1C_1

（C）直线 A_1D_1　　（D）直线 A_1B_1

（12）α，β 表示平面，a，b 表示直线，下列各命题中正确的是（　　）.

（A）若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 a，b 是异面直线，则 $\alpha/\!/\beta$

（B）若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 $a/\!/b$，则 $\alpha/\!/\beta$

（C）若 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，且 $a\perp b$，则 $\alpha\perp\beta$

（D）若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 $\alpha/\!/\beta$，则 a，b 是异面直线

（13）平面 α 的一条斜线段等于它在 α 上射影的 2 倍，那么斜线与平面所成的角是（　　）.

（A）$30°$　　（B）$45°$　　（C）$60°$　　（D）$75°$

（14）下列命题正确的是（　　）.

（A）过平面外一点作这个平面的垂直平面是唯一的

（B）过直线外一点作这条直线的垂线是唯一的

（C）过平面的一条斜线作这个平面的垂直平面是唯一的

（D）过直线外一点作这条直线的平行平面是唯一的

（15）α，β 表示平面，a 表示直线，若 $\alpha/\!/\beta$，$a\subset\alpha$，下列四个命题：

①a 与 β 内的所有直线都平行；　②a 与 β 内的无数条直线平行；

③a 与 β 内任何一条直线都不垂直；④a 与 β 无公共点.

其中真命题的个数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（16）若 α，β 表示平面，m，n 表示直线，P 表示点，则下列命题：

① $\alpha\cap\beta=n$，$m\subset\beta$，$m/\!/\alpha\Rightarrow m/\!/n$；

② $m\subset\beta$，$n\subset\beta$，$m\cap n=P$，$m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha\Rightarrow\beta/\!/\alpha$；

③ $m\perp\alpha$，$m\subset\beta\Rightarrow\beta\perp\alpha$；

④ $m\perp\alpha$，$m\perp n\Rightarrow n/\!/\alpha$.

其中真命题的个数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（17）下列命题正确的是（　　）.

（A）过平面外一点，有且只有一个平面与这个平面平行

（B）过平面外一条直线，有且只有一个平面与这个平面平行

（C）过平面外一点有且只有一条直线与这个平面平行

（D）过平面外一点可以作无数个平面与这个平面平行

（18）若 α，β 表示平面，m，n，l 表示直线，有下列命题：

①若 $m/\!/n$，$n\subset\alpha$，则 $m/\!/\alpha$；

②若 $l\perp\alpha$，$m\perp\beta$，且 $l/\!/ m$，则$\alpha/\!/\beta$；

③若 $m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m/\!/\beta$，$n/\!/\beta$，则$\alpha/\!/\beta$；

④若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\beta$，$n\perp m$，则 $n\perp\alpha$.

其中，真命题个数是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（19）如图 8-20 所示，长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=4$，$AD=1$，点 E、F、G 分别是 DD_1、AB、CC_1 的中点，则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角的余弦值是（　　）.

（A）$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

（20）如图 8-21 所示，在四面体 $S\text{-}ABC$ 中，$SA=SC=AC=AB=BC=a$，$SB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，则二面角 $S\text{-}AC\text{-}B$ 的大小是（　　）.

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）90°

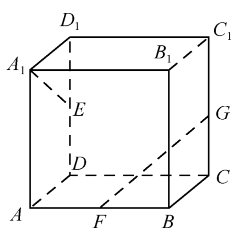


图 8-20

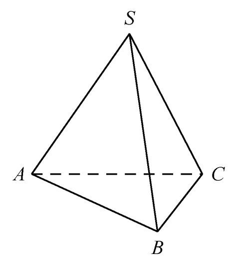


图 8-21

2．填空题

（1）用平面截球得到一个直径为 4 的圆，且球心到这个平面的距离是 2，则该球的表面积为________.

（2）圆锥的侧面展开图是半径为 1，圆心角为 270° 的扇形，则它的底面积为________.

（3）一个正四棱锥的高和底面边长都是 4，则它的侧面积是________.

（4）已知圆柱的底面半径为 3，母线长为 6，则这个圆柱的全面积为________.

（5）如图 8-22 所示，在“$\subset$，$\supset$，$\in$，$\notin$”中选择适当的符号填入下面空格：

AB______β，A______AB，A______β，α______CD，A______α，BD______β，D______α.

（6）如图 8-23 所示，在矩形 $ABCD$ 中，将$\triangle ABD$ 沿对角线 BD 折起，使 A 点到 A_1 的位置，若点 A_1 在平面 BCD 内的投影在 CD 上，则 BC 与 A_1D 所成的角的度数是________.

（7）如图 8-24 所示，正方体的棱长为 a，有一个小虫，在正方体的表面上从顶点 A 爬到顶点 C' ，则小虫爬行的最短距离为________.

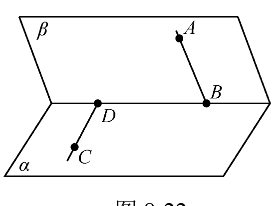


图 8-22

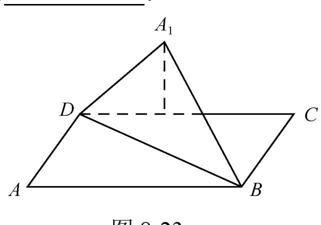


图 8-23

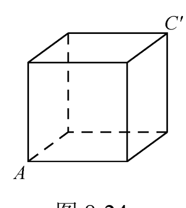


图 8-24

（8）已知边长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，若 E 是 A_1B_1 的中点，则直线 AE 和直线 CA_1 所成角的余弦为________.

3．如图 8-25 所示，棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求点 A 到平面 A_1BD 的距离.

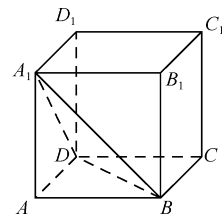


图 8-25

4．如图 8-26 所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PC\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\,/\!/\,DC$，$DC\perp AC$.

（1）求证：$DC\perp$ 平面 PAC.

（2）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC.

（3）设点 E 为 AB 的中点，在棱 PB 上是否存在点 F，使得 $PA/\!/$平面 CEF？说明理由.

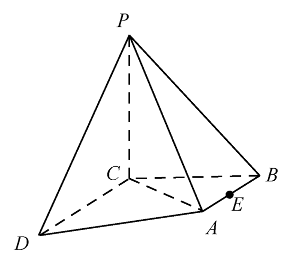


图 8-26

5．如图 8-27 所示，已知在棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ 中，棱 AB 的中点为 E，求：（1）异面直线 CE 和 AD 所成角的余弦值．（2）正四面体 $ABCD$ 的体积．

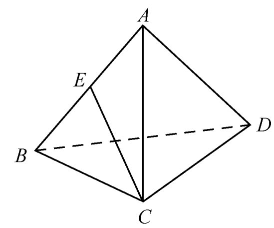


图 8-27

6．如图 8-28 所示，已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $ABEF$ 不共面，两点 M，N 分别在 BD 和 AE 上，且 $AN=DM$．求证：MN//平面 BCE．

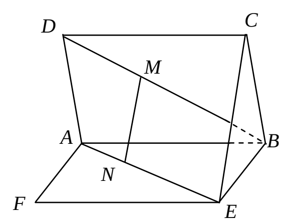


图 8-28

7．如图 8-29 所示，已知四棱锥 P-$ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB//DC$，$\angle DAB=90°$，$PA\perp$底面 $ABCD$，且 $PA=AD=DC=\frac{1}{2}$，$AB=1$.

（1）求 DC 与 PB 所成角的余弦值.

（2）证明：平面 $PAD\perp$平面 PCD.

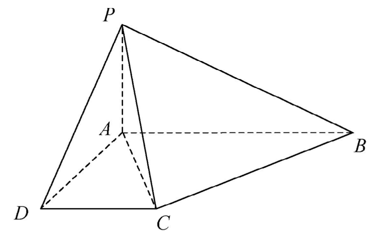


图 8-29

8．如图 8-30 所示，在△ABC 中，$AB=6$，$AC=8$，$BC=10$，P 是平面 ABC 外一点，且 $PA=PB=PC=6$.

（1）求证：平面 $ABC\perp$平面 PBC.

（2）求点 P 到平面 ABC 的距离.

（3）求 PA 与平面 ABC 所成角的余弦值.

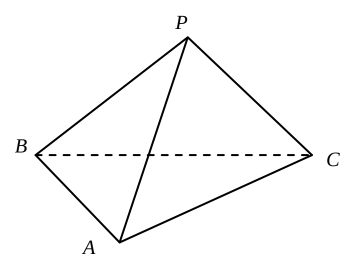


图 8-30

测 试 题 八

（时间为 120 分钟，满分 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分）

1．线段 AB 在平面α内，则直线 AB 与平面α的位置关系是（　　）.

（A）$AB\subset\alpha$　　（B）$AB\not\subset\alpha$

（C）由线段 AB 的长短而定　　（D）以上都不对

2．长方体的长、宽、高的比为 1∶2∶3，对角线长为$2\sqrt{14}$，则其体积为（　　）.

（A）16　　（B）24　　（C）48　　（D）96

3．如图 8-31 所示的四个正方体中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，P 分别为其所在棱的中点，能得出 AB//平面 MNP 的图形的序号是（　　）.

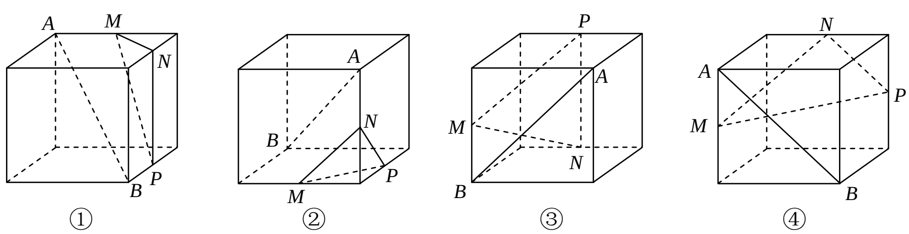


图 8-31

（A）①，③　　（B）①，④　　（C）②，③　　（D）②，④

4．下列说法正确的是（　　）.

（A）三点确定一个平面

（B）四边形一定是平面图形

（C）梯形一定是平面图形

（D）平面α和平面β有不同在一条直线上的三个公共点

5．一个棱柱是正四棱柱的条件是（　　）.

（A）底面是正方形，有两个侧面是矩形

（B）底面是正方形，有两个侧面垂直于底面

（C）底面是菱形，且有一个顶点处的三条棱两两垂直

（D）每个侧面都是全等矩形的四棱柱

6．球的体积与其表面积的数值相等，则球的半径为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）3　　（C）2　　（D）$\dfrac{1}{2}$

7．长方体一个顶点上三条棱的长度分别为 3，4，5，且它的 8 个顶点都在同一球面上，这个球的表面积是（　　）.

（A）50π　　（B）200π　　（C）$20\sqrt{2}\pi$　　（D）$25\sqrt{2}\pi$

8．半径为 6 的半圆卷成一个圆锥，则它的体积为（　　）.

（A）$9\sqrt{3}\pi$　　（B）$6\sqrt{3}\pi$　　（C）$9\sqrt{5}\pi$　　（D）$6\sqrt{5}\pi$

9．如图 8-32 所示，半径为 1 的圆 $O\subset$平面α，$PO\perp\alpha$，直线 $l\subset\alpha$，且 l 和圆 O 相切，若 $PO=2\sqrt{2}$，则点 P 到 l 的距离是（　　）.

（A）$\sqrt{7}$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）3　　（D）不能确定

10．如图 8-33 所示，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H 分别是 AA_1，A_1D_1，A_1B_1，BB_1 的中点，则异面直线 EF 与 GH 所成角的大小是（　　）.

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）120°

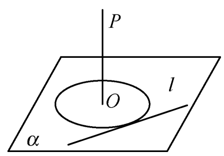


图 8-32

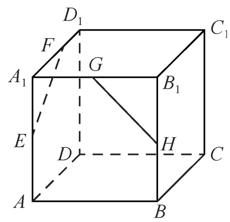


图 8-33

11．在△ABC 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，$PA\perp$平面 ABC，$PA=4$，则 P 到 BC 的距离为（　　）.

（A）$\sqrt{61}$　　（B）$\sqrt{13}$　　（C）$2\sqrt{13}$　　（D）$4\sqrt{2}$

12．若直线 a//平面α，直线 $a\subset\beta$，且$\alpha\cap\beta=b$，则 a，b 关系为（　　）.

（A）$a\perp b$　　（B）相交　　（C）a // b　　（D）异面直线

13．正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，二面角 $D_1\text{-}AB\text{-}D$ 的大小是（　　）.

（A）30°　　（B）45°　　（C） 60°　　（D） 90°

14．下列结论错误的是（　　）.

（A）两条异面直线所成的角的范围是$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

（B）两条直线所成的角的范围是$\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

（C）两个向量所成的角的范围是 $[0，\pi]$

（D）平面的斜线与平面所成角的范围是$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

15．边长为 a 的菱形 $ABCD$，$\angle BAD=60°$，沿对角线 BD 折成 60°的二面角，则 AC 的长为（　　）.

（A）a　　（B）$\dfrac{a}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$

16．设有两条直线 a，b 和两个平面α，β，则下列命题中错误的是（　　）.

（A）若 a//α，且 a//b，则 $b\subset\alpha$，或 b//α

（B）若 a//b，且 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则α//β

（C）若$\alpha//\beta$，且 $a\perp\alpha$，$b\perp\beta$，则 $a//b$

（D）若 $a\perp b$，且 $a//\alpha$，则 $b\perp\alpha$

17．若 a，b 是两条异面直线，则下列说法错误的是（　　）.

（A）过直线 a 可以作一个平面并且只可以作一个平面α与直线 b 平行

（B）过直线 a 至多可以作一个平面α与直线 b 垂直

（C）存在唯一平面与直线 a、b 等距离

（D）可能存在平面与直线 a、b 都垂直

18．已知二面角α-l-β中，点 A 在半平面α内，若点 A 到 l 的距离是它到平面β的距离的 2 倍，则二面角α-l-β的大小为（　　）.

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）90°

19．如图 8-34 所示，在正四面体 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AB，BC 的中点，连接 EF，则下列结论错误的是（　　）.

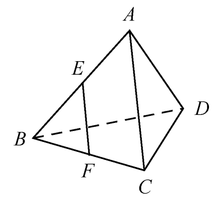


图 8-34

（A）异面直线 AB 与 CD 所成的角为 90°

（B）直线 AB 与平面 BCD 所成的角为 60°

（C）直线 EF//平面 ACD

（D）平面 $AFD\perp$平面 BCD

20．如图 8-35 所示，$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，下面结论错误的是（　　）.

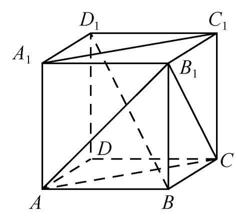


图 8-35

（A）A_1C_1 // 平面 B_1AC

（B）$BD_1\perp AC$

（C）$BD_1\perp$ 平面 ACB_1

（D）异面直线 AD 与 CB_1 所成的角是 60°

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．若球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则该球的内接正方体的体积为 ________________.

22．线段 AB 所在的直线和平面α成 60° 的角，A，B 与平面α的距离分别为 9 和 6，则线段 AB 的长是_______.

23．在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则异面直线 BD_1 与 CC_1 所成角的大小是_______.

24．已知圆锥的母线长为 5，底面周长为 6π，则它的体积是_______.

25．已知正△ABC 的边长为 2 cm，$PA\perp$平面 ABC，A 为垂足，且 PA=2 cm，那么 P 到 BC 的距离为_______.

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 40 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）如图 8-36 所示，已知直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，D，E 分别是棱 AB，A_1C_1 的中点.

（1）求证：DE // 平面 BCC_1B_1.

（2）求直线 DE 与平面 ABC 所成角的正切值.

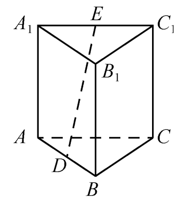


图 8-36

27.（7 分）如图 8-37 所示，四边形 $ABCD$ 是矩形，$SA\perp$平面 $ABCD$，E，F 分别是 SB，SD 的中点.

求证：（1）EF // 平面 $ABCD$.（2）平面 $SCD\perp$平面 SAD.

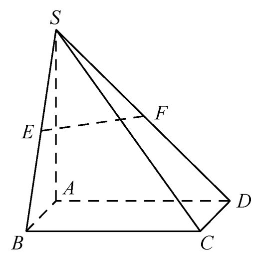


图 8-37

28.（8 分）如图 8-38 所示，三棱锥 A-BCD 中，$AB\perp$平面 BCD，$CD\perp BD$.

（1）求证：$CD\perp$平面 ABD.

（2）若 $AB=BD=CD=1$，M 为 AD 中点，求三棱锥 A-MBC 的体积.

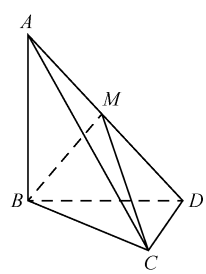


图 8-38

29．（8 分）如图 8-39 所示，已知四边形 $PABD$ 是圆柱的轴截面，点 C 是下底面圆周上不与点 A，B 重合的点．

（1）求证：平面 $PCB\perp$平面 PAC．

（2）若$\triangle ACB$ 是等腰三角形，求该圆柱与三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积的比值．

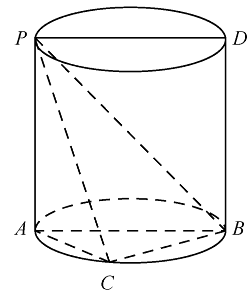


图 8-39

30．（10 分）如图 8-40 所示，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，$PA\perp AB$，$PA\perp BC$，$AB\perp BC$，$PA=AB=BC=2$，D 为线段 AC 的中点，E 为线段 PC 上的一点．

（1）求证：$PA\perp BD$．

（2）求证：平面 $BDE\perp$平面 PAC．

（3）当 $PA//$ 平面 BDE 时，求三棱锥 $E\text{-}BCD$ 的体积．

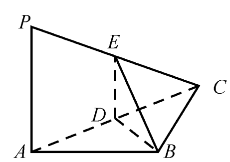


图 8-40

打击与挫败是成功的踏脚石，而不是绊脚石。我们最值得自豪的不在于从不跌倒，而在于每次跌倒之后都能爬起来。

第九章
概率与统计初步

【复习要求】

概率与统计的意义在于，能够通过对随机现象的观察和对数据的分析处理，帮助我们发现事物内在的规律，对某些现象作出解释，并通过建立模型，对未来进行预测，从而趋利避害．概率与统计的知识应用比较广泛，部分内容是大数据分析时应该掌握的基本知识．对本部分内容的复习建议如下：

1．掌握分类计数原理及分步计数原理，会用这两个原理解决一些较简单的问题．

2．理解排列和排列数的意义，会用排列数公式计算简单的排列问题．

3．理解组合和组合数的意义及组合数的性质，会用组合数公式计算简单的组合问题．

4．理解二项式定理，理解二项式系数的性质．

5．了解样本空间、随机事件、基本事件、古典概型、古典概率的概念及概率的简单性质，会应用古典概率解决一些简单的实际问题．

6．了解直方图与频率分布，理解总体与样本，了解抽样方法．

7．理解总体均值、标准差，会用样本均值、标准差估计总体均值、标准差．

8．能运用概率、统计初步知识解决简单的实际问题．

【知识框图】

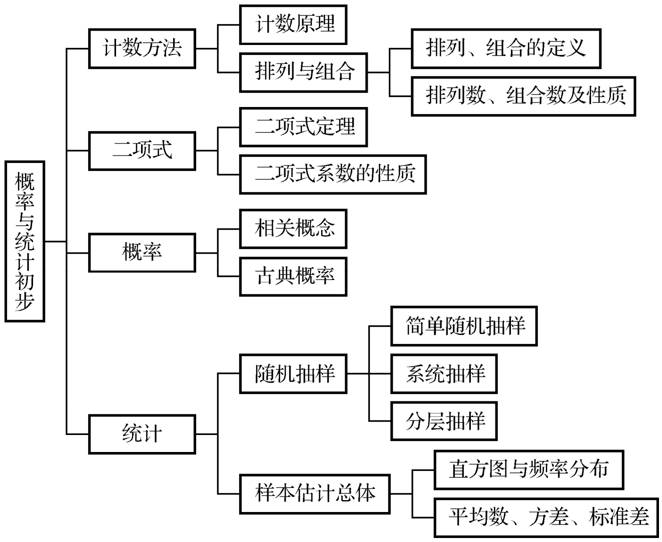


图 9-1

【知识要点】

1．计数的基本原理

（1）分类计数原理：如果完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

（2）分步计数原理：如果完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第 1 步有 m_1 种不同的方法，做第 2 步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

2．排列

（1）排列及有关概念.

（2）排列数公式

$$\mathrm{A}_n^m=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\quad(m,n\in\mathbf{N}_+，且m\leqslant n);$$

特别地，$\mathrm{A}_n^n=n!$，并规定 $0!=1$.

3．组合

（1）组合及有关概念.

（2）组合数公式

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\quad(m,n\in\mathbf{N}_+，且m\leqslant n);$$

特别地，$\mathrm{C}_n^n=1$，$\mathrm{C}_n^0=1$.

（3）组合数的性质

①$C_n^m=C_n^{n-m}$； ②$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

4．二项式

（1）二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^nb^n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

其中，C_n^m（m=0，1，2，…，n）叫作二项式系数；$T_{m+1}=C_n^ma^{n-m}b^m$ 叫作二项展开式的通项公式．显然，这个通项公式是用第“m+1”项来表示的．

（2）二项式系数的性质

①在杨辉三角中，除每行两端的 1 以外，每个数字都等于它肩上两个数的和，即：

$$C_{n+1}^r=C_n^{r-1}+C_n^r.$$

②在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等，即：$C_n^r=C_n^{n-r}$.

③如果二项式的幂指数 n 是偶数，那么中间一项即第“$\frac{n}{2}$+1”项的二项式系数最大；如果二项式的幂指数 n 是奇数，那么中间两项即第 $\frac{n+1}{2}$ 项和第 $\frac{n+3}{2}$ 项的二项式系数相等且最大．

④ $(a+b)^n$ 的二项展开式的所有二项式系数之和为 2^n，即

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^m+\cdots+C_n^n=2^n.$$

⑤ $(a+b)^n$ 的二项展开式中，奇数项的二项式系数之和等于偶数项的二项式系数之和，即

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots.$$

注：①在应用二项展开式的通项公式时，要注意审题，弄清是求某一项还是求该项的项数．

②要注意某一项的二项式系数与该项的系数的区别．在二项展开式中，第“m+1”项的二项式系数就是C_n^m，但该项的系数却不一定是C_n^m.

5．随机事件与样本空间

（1）随机事件：随机试验中每种可能的结果．随机事件也简称事件．不能再分的最简单的随机事件称为基本事件．例如，在抛掷一枚骰子的随机试验中，“朝上一面出现 1 点”是一个基本事件，而 A={出现 1 点}，B=｛出现点数为奇数｝都是随机事件．

（2）样本空间：全体基本事件构成的集合叫作随机试验的样本空间．

①随机事件是样本空间的子集；

②必然事件与不可能事件是随机事件的特殊情况．

6．古典概率

（1）古典概型是一种研究概率的数学模型．在这个模型下，随机试验所有可能的结果是有限的，并且每个基本结果发生的机会是均等的．简单讲，古典概型有两个特点：①有限性；②等可能性．只有同时具备这两个特点的概率模型才是古典概型．

（2）古典概率：对于古典概型，如果试验的基本事件的总数为 n，随机事件 A 包含的基本事件数为 m，我们就用 $\frac{m}{n}$ 来描述事件 A 出现的可能性大小，并称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的概率，

也称古典概率，记作 $P(A)=\dfrac{m}{n}\quad(m\leqslant n)$，显然 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

注：必然事件的概率是 1，不可能事件的概率是 0.

7．随机抽样

三种抽样方法综合比较，如表 9-1 所示：

表 9-1

类别	共同点	各自特点	相互联系	适用范围
简单随机抽样	抽样过程中每个个体被抽到的可能性相同	从总体中随机抽取，逐个进行	是另外两种抽样方法的基础	总体中的个体数较少
系统抽样		将总体中的个体先编号，再按照顺序均分成几部分，然后按事先确定的规则在各部分中抽取	在起始部分抽样时采用简单随机抽样	总体中的个体数较多
分层抽样		将总体分成几层，按照各层所占比例在每一层随机抽取	各层抽样时采用简单随机抽样或系统抽样	总体由差异明显的几部分组成

8．用样本估计总体

（1）频率分布表、频率分布直方图

当总体中个体数较多甚至无限时，应采用样本频率分布去估计总体分布．把样本数据表示成频率分布表和频率分布直方图的主要步骤如下：①计算极差；②决定组距与组数；③决定分点；④列频率分布表；⑤绘制频率分布直方图．

（2）用样本平均数估计总体平均数

①平均数描述数据平均水平，定量地反映了数据集中趋势所处的水平．

②用样本平均数估计总体平均数时样本平均数只是总体平均数的近似．

（3）用样本标准差估计总体标准差

①样本方差描述了一组数据围绕平均数的波动程度．

②为了得到以样本数据的单位表示的波动幅度，需求出样本方差的算术平方根，即样本标准差．

（4）样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的方差与标准差的计算公式（其中，x 为平均数）：

①方差：$s^2=\dfrac{(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2}{n}$.

②标准差：$s=\sqrt{\dfrac{(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2}{n}}$.

【例题精选】

【例 1】选择题

（1）把 4 个不同的球任意投入 3 个不同的盒子内（每盒装球数不限），共有不同的投法种数是（　　）.

（A）12　　　　（B）24

（C）64　　　　（D）81

分析：根据题意，每个球都可以投到任意一个盒子，均有 3 种投法．四个球可分四步投出，由分步计数原理得　$N=3\times3\times3\times3=3^4=81$，故选（D）．

（2）有 8 个座位供 4 个人坐，一人坐一个座位，共有不同坐法的种数是（　　）．

（A）40 320　　　　（B）4096

（C）65 536　　　　（D）1680

分析：本问题的本质是从 8 个不同的座位中任选 4 个，按 4 个人不同的排列顺序去坐，符合排列的概念，故为 A_8^4，故选（D）．

（3）某学校要请 10 位老校友中的 6 位参加一项活动，其中有 2 位老校友要么都请，要么都不请，则邀请方法的种数共为（　　）．

（A）120　　　　（B）60

（C）80　　　　（D）98

分析：采用分类讨论的方法．第一种情况，这 2 位老校友都请，则邀请方法有 $\mathrm{C}_8^4=70$（种）；第二种情况，2 位老校友都不请，则邀请方法有 $\mathrm{C}_8^6=28$（种）；所以共有 $70+28=98$（种）邀请方法，故选（D）．

（4）在$(1+x)^n$（$n\in\mathbf{N}_+$）的展开式中，含 x^5 项的二项式系数最大，则 n 的值是（　　）．

（A）8　　　　（B）9

（C）10　　　　（D）11

分析：根据二项展开式的通项公式$T_{m+1}=\mathrm{C}_n^m x^m$，得出 $m=5$，所以第 6 项为中间项，所以 $n=10$，故选（C）．

（5）在 10 件产品中有 7 件正品，3 件次品，从这 10 件产品中任取 3 件，至少有一件次品的概率是（　　）．

（A）$\dfrac{7}{24}$　　　　（B）$\dfrac{17}{24}$

（C）$\dfrac{3}{10}$　　　　（D）$\dfrac{7}{10}$

分析：事件“从中任取 3 件”所包含的基本事件总数$n=\mathrm{C}_{10}^3=120$．

“任取 3 件产品，其中至少有一件次品”的情况分别包括：恰有一件次品，恰有 2 件次品和恰有 3 件次品，因此不同的取法的种数为$m=\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^2+\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_7^1+\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_7^0=85$；

所以，所求概率为$P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{85}{120}=\dfrac{17}{24}$．故选（B）．

点评： 本题另一种思路：“一件次品都没有”包含的基本事件数为C_7^3，则“至少有一件次品”包含的基本事件数为$\mathrm{C}_{10}^3-\mathrm{C}_7^3$，那么至少有一件次品的概率是$P=\dfrac{\mathrm{C}_{10}^3-\mathrm{C}_7^3}{\mathrm{C}_{10}^3}=\dfrac{17}{24}$．

（6）依次抛掷三枚质地均匀的硬币，用(x,y,z)表示这个随机试验的结果，其中 x，y，z 分别表示第 1、第 2、第 3 枚硬币朝上一面是正面或反面的情况，那么这个随机试验的基本事件个数是（　　）．

（A）6　　（B）8　　（C）9　　（D）27

分析：完成“抛掷三枚硬币”这件事共分三步，每一步抛掷的硬币都可能出现两种情况，根据分步计数原理，这个随机试验的基本事件共有 $2^3=8$（个），故选（B）.

（7）在编号为 000-999 的 1000 个有机会中奖的号码中，按照随机抽取的方法确定后两位数为 88 的号码为中奖号码，则该抽奖过程运用的抽样方法是（　　）.

（A）简单随机抽样　　（B）系统抽样

（C）分层抽样　　（D）以上均不对

分析：由题意，中奖号码依次为：088，188，288，388，488，588，688，788，888，988，相邻两个号码的差为 100，是“间隔距离相等”的抽取方法，符合系统抽样的有关规定．因此，该抽奖过程运用了系统抽样的方法，故选（B）.

（8）要完成下列两项调查：①某地盛产水果，现从 8000 亩（1 亩≈667 m^2）苹果、6000 亩梨和 5000 亩葡萄中做抽样调查，调查水果中维生素 C 的含量；②从某中学的 15 名三好学生中选出 3 人调查数学学习水平．要完成这两项调查宜采用的抽样方法依次为（　　）.

（A）①用随机抽样法，②用系统抽样法

（B）①用分层抽样法，②用简单随机抽样法

（C）①用系统抽样法，②用分层抽样法

（D）①②都用分层抽样法

分析：①中明显是有苹果、梨和葡萄三种不同的水果，宜采用分层抽样的方法；②中的总体仅有 15 个，因此可用简单随机抽样法．故选（B）.

（9）要从编号为 1~50 的 50 枚最新研制的某型号导弹中随机抽取 5 枚来进行发射试验，用系统抽样方法抽取的 5 枚导弹的编号可能是（　　）.

（A）5，10，15，20，25　　（B）3，13，23，33，43

（C）1，2，3，4，5　　（D）6，15，27，34，48

分析：由系统抽样的方法可知，50 枚导弹，分为 5 组，每组 10 枚，第一枚的数字应该在 1～10 之间，第二枚在 11~20 之间，依次类推，并且编号构成了等差数列，公差为 10，故选（B）.

（10）某校共有学生 2000 名，各年级男、女生人数如表 9-2 所示．已知在全校学生中随机抽取 1 名，抽到二年级女生的概率是 0.19．现用分层抽样的方法在全校抽取 64 名学生，则应在三年级抽取的学生人数为（　　）.

（A）24　　（B）18　　（C）16　　（D）12

表 9-2

	一年级	二年级	三年级
女	373	x	y
男	377	370	z

分析：根据给出的概率先求出 x 的值，这样就可以知道三年级的学生人数，问题就解决了．二年级女生占全校学生总数的 19%，即 $x=2000\times0.19=380$（人），这样一年级和二年级学生的总数是 373+377+380+370=1500（人），则三年级学生共有 500 人，用分层抽样抽取的三年级学生应是 $\frac{64}{2000}\times500=16$（人）．故选（C）.

【例 2】填空题

（1）有 4 名学生参加争夺数学、语文、英语竞赛冠军，有________种不同的结果.

分析：每学科的冠军归属都有 4 种可能，3 个学科的冠军可分为 3 个步骤，根据分步计数原理，有 $4\times4\times4=4^3$（种）不同的结果.

（2）现有 11 位男同学和 7 位女同学，若：

①从中任选一位同学参加某项比赛，有________种不同的选法；

②从中任选一位男同学和一位女同学参加某项比赛，有________种不同的选法.

分析：问题①可运用分类计数原理解决：11+7=18（种）；

问题②可运用分步计数原理：$11\times7=77$（种）.

（3）为了了解某中学男生的身体发育情况，对随机抽取的 100 名男生的身高进行了测量（结果精确到 1 cm），并绘制了如图 9-2 所示的频率分布直方图，由图可知男生身高超过 172 cm 的频率是________.

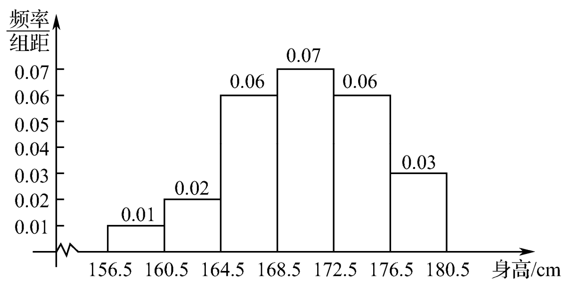


图 9-2

分析：观察图 9-2，满足身高超过 172 cm 的有两组：172.5～176.5，176.5～180.5，相应的“$\dfrac{频率}{组距}$”分别是 0.06，0.03，根据：组距$\times\dfrac{频率}{组距}$=频率，可知两组的频率为：

$0.06\times4+0.03\times4=(0.06+0.03)\times4=0.36$.

（4）从 5 名志愿者中选派 4 人在星期五、星期六、星期日参加公益活动，每人一天，要求星期五有一人参加，星期六有两人参加，星期日有一人参加，则不同的选派方法共有________.

分析：周五参加公益活动人员是从 5 人中选一人有 C_5^1 种选法，周六从 4 人中选两人有 C_4^2，周日则有 C_2^1 种，故共有 $C_5^1\times C_4^2\times C_2^1=60$（种）选法.

（5）$(x+1)^4$ 的展开式中 x^2 的系数为________.

分析：根据二项展开式的通项公式，$T_{m+1}=C_4^m x^{4-m}$，可知，当 $m=2$ 时，x^2 的系数是 $C_4^2=6$.

（6）二项式$(3x-2)^{12}$的展开式中，所有项的系数之和等于________；所有项的二项式系数之和等于________.

分析：在二项展开式中，所有项的系数之和为 $x=1$ 时的值，令 $x=1$，则所有项的系数之和为$(3-2)^{12}=1$；所有项的二项式系数之和为 $C_{12}^0+C_{12}^1+C_{12}^2+\cdots+C_{12}^{12}=2^{12}=4096$.

（7）从装有 4 个红球、3 个白球的盒中任意取出两个球，则取出的两个球颜色相同的概

率是________.

分析：由题意知基本事件总数 $n=C_7^2=21$；事件 $A=$“取出的两个球颜色相同”共分两类情况，第一类情况是“取出的两个球都是红球”，共有 C_4^2 种取法；第二类情况是“取出的两个球都是白球”，共有 C_3^2 种取法，所以事件 A 所包含的基本事件数 $m=C_4^2+C_3^2=9$，所以 $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{9}{21}=\dfrac{3}{7}$.

（8）某职业学校高一年级的机电、财经、医护三个专业的学生人数之比是 5∶3∶2，若用分层抽样方法抽取 100 个学生，则应从医护专业抽取的人数是________.

分析：考查的是分层抽样的方法，抽取医护专业的人数为：$100\times\dfrac{2}{5+3+2}=20$.

【例 3】四个男生和三个女生排成一排照相，分别按下列要求，求各有多少种不同的排法？

（1）学生甲必须排在最左边或最右边.

（2）学生甲、学生乙均不在两端.

（3）学生甲、学生乙排在一起.

（4）学生甲、学生乙不相邻.

（5）三个女生两两都不相邻.

解：（1）学生甲排在两头，可先排甲，再排其他 6 人，即 $A_2^1\cdot A_6^6=2\times720=1440$（种）.

（2）第一步，在中间 5 个位置中选两个排甲、乙两人；

第二步，余下 5 人全排列：$A_5^2\cdot A_5^5=20\times120=2400$（种）.

（3）相邻问题可用捆绑法，第一步，把甲、乙看作一个元素，与其他 5 人共 6 个元素全排列；第二步，甲、乙二人全排列：$A_6^6\cdot A_2^2=720\times2=1440$（种）.

（4）不相邻问题可用插空法，第一步，把甲、乙之外的 5 个人全排列；第二步，在 5 个人之间或两端的 6 个空中，排入甲、乙两人：$A_5^5\cdot A_6^2=120\times30=3600$（种）.

（5）不相邻问题可用插空法：$A_4^4\cdot A_5^3=24\times60=1440$（种）.

点评：第(4)小题另一种思路(排除法)：用七个人的全排列的方法数 A_7^7 减去甲、乙排在一起的方法数 $A_6^6\cdot A_2^2$ 即为所求.

【例 4】已知集合 $A=\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，$M(a, b)$表示平面上的点，其中 $a,b\in A$．问：

（1）$M(a, b)$可表示平面上多少个不同的点？

（2）$M(a, b)$可表示多少个在直线 $y=x$ 上的点？

（3）$M(a, b)$可表示多少个在坐标轴上的点？

（4）$M(a, b)$可表示多少个不在第一象限的点？

解：（1）根据分步计数原理知：$11\times11=121$.

（2）点 $M(a, b)$在直线 $y=x$ 上的充要条件是 $a=b$，故所求点的个数为 11 个.

（3）点 $M(a, b)$在坐标轴上的充要条件是 $a=0$ 或 $b=0$，当 $a=0$ 时，有 11 个.

当 $b=0$ 时，有 11 个，其中 $a=0$ 且 $b=0$ 计算了两次，因而所求点的个数为 21 个.

（4）用排除法，$M(a, b)$表示平面上 121 个不同的点，其中在第一象限的点的个数为

$5\times5=25$（个），因而所求点的个数为$121-25=96$（个）.

【例 5】用数字 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的四位数，

（1）能组成多少个？

（2）组成的数中有多少个偶数？

（3）组成的数中有多少个能被 5 整除？

（4）组成的数中比 2000 大的有多少个？

（5）组成的数中有多少个奇数？

解：（1）特殊优先法：由于 0 是特殊元素，0 不能为首位，所以首位有 A_5^1 种，其他 3 位是从剩余的 5 个数字中选 3 个数字的一个排列，有 A_5^3 种，所以能组成 $A_5^1A_5^3=300$（个）.

（2）由于 0 是特殊元素，分二类：第一类个位是 0 有 A_5^3 个；第二类，个位不是 0，先确定个位从 2、4 中选一个有 A_2^1，再确定首位有 A_4^1 种，其余两位是从 4 个数中选 2 个的排列有 A_4^2 种；所以共有 $A_5^3+A_2^1\ A_4^1\ A_4^2=156$（个）.

（3）被 5 整除的数个位上是 0 或者 5，分两类：第一类个位是 0，有 A_5^3 个；第二类个位是 5，有 $A_4^1\ A_4^2$ 个；所以共有 $A_5^3+A_4^1\ A_4^2=108$（个）被 5 整除的数.

（4）首位为 2、3、4、5 中的一个有 A_4^1 种选法，其他三位有 A_5^3 种排法，所以共有 $A_4^1\ A_5^3=240$（个）比 2000 大的数.

（5）个位上的数字为 1，3，5 中的一个有 A_3^1 种选法；首位从剩余 4 个不是 0 的数字中选一个，有 A_4^1 种选法；中间两位有 A_4^2 种排法，所以共有 $A_3^1\ A_4^1\ A_4^2=144$（个）奇数.

【例 6】求$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$的二项展开式中的常数项.

解：设$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$的二项展开式中的常数项为第“$m$+1”项，则

$$T_{m+1}=C_{12}^m(\sqrt{x})^{12-m}\left(\frac{1}{x}\right)^m=C_{12}^m x^{\frac{12-m}{2}}x^{-m}=C_{12}^m x^{\frac{12-3m}{2}},$$

所以，当 $12-3m=0$ 时，即 $m=4$ 时，常数项为 $T_5=C_{12}^4=495$.

【例 7】 2018 年某高校社会实践小组对某小区广场舞开展状况进行了年龄的调查，为便于调查，从 120 位成员中随机抽取了 40 名广场舞者，将他们年龄分成 6 段：[20，30)，[30，40)，[40，50)，[50，60)，[60，70)，[70，80]，得到如图 9-3 所示的频率分布直方图.

（1）求图中 x 的值.

（2）求在 40 名广场舞者中年龄分布在$[40,\ 70)$的人数.

（3）试估计参加广场舞的 120 人中年龄在$[40,\ 50)$的人数.

解：（1）由直方图可知，频率总和为$(0.005+0.010+0.020+0.030+x+0.010)\times10=1$，所以 $x=0.025$.

（2）由直方图可知，[40，70)年龄段所含的频率总和为$(0.020+0.030+0.025)\times10=0.75$，所以 40 名广场舞者中年龄分布在[40，70)的人数为 $0.75\times40=30$（人）.

（3）由直方图可知，年龄在[40，50)的频率为 $0.020\times10=0.2$，

所以估计参加广场舞的 120 人中年龄在[40, 50) 的人数约为 120×0.2=24（人）.

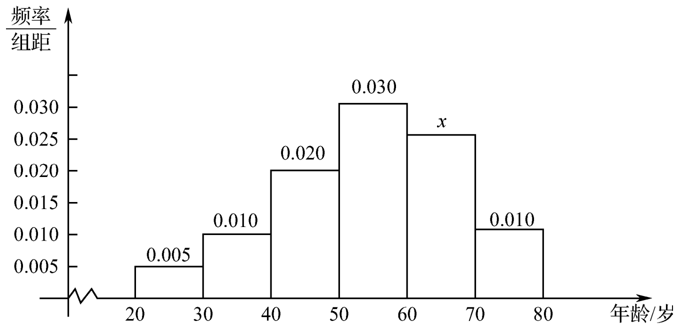


图 9-3

【例 8】做抛掷两枚骰子的试验，用（x，y）表示结果，其中 x 表示第一枚骰子朝上一面的点数，y 表示第二枚骰子朝上一面的点数.

求：（1）点数之和等于 10 的概率.

（2）点数之和大于 10 的概率.

解：作图 9-4，从图中可以看出，抛掷两枚骰子这一试验所包含的基本事件总数 n=36.

（1）记“点数和等于 10”的事件为 A，从图中可看到事件 A 所包含的基本事件共 3 个，所以

$$P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

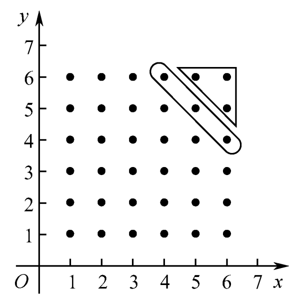


图 9-4

（2）记“点数和大于 10”的事件为 B，则从图中可看到事件 B 所包含的基本事件共 3 个，所以

$$P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

【例 9】某中专进行体育测试，从中抽取 100 人的成绩，统计情况如表 9-3 所示，求这 100 个成绩的标准差.

表 9-3

分数	1	2	3	4	5
人数/人	10	30	30	10	20

解：这 100 个成绩的平均数是 $\dfrac{1\times10+2\times30+3\times30+4\times10+5\times20}{100}=3$，

标准差是

$$s=\sqrt{\frac{10\times(1-3)^2+30\times(2-3)^2+30\times(3-3)^2+10\times(4-3)^2+20\times(5-3)^2}{100}}$$

$$=\sqrt{\frac{40+30+10+80}{100}}=\sqrt{\frac{8}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

习　题　九

1．选择题

（1）二次函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 a，b，$c\in\{0，1，2，3\}$，由此可以得到不同的二次函数的个数为（　　）.

（A）24　　（B）4　　（C）64　　（D）48

（2）盒内有 9 支铅笔，其中红色铅笔 5 支，蓝色铅笔 4 支，从中任取 2 支，恰好取到相同颜色铅笔的概率是（　　）.

（A）$\dfrac{1}{6}$　　（B）$\dfrac{5}{18}$　　（C）$\dfrac{4}{9}$　　（D）$\dfrac{5}{9}$

（3）某学校开设甲类选修课 3 门，乙类选修课 4 门，一位同学从中共选 3 门，若要求从两类课程中各至少选一门，则不同的选法种类是（　　）.

（A）24　　（B）30　　（C）35　　（D）60

（4）要排一张 5 个独唱节目和 3 个合唱节目的演出节目表，如果合唱节目不排头，并且任何两个合唱节目不相邻，则不同排法的种类是（　　）.

（A）40 320　　（B）720　　（C）7200　　（D）14 400

（5）从 1，2，3，4，5 中任选 3 个，从 6，7，8 中任选 2 个，可组成无重复数字的五位数的个数为（　　）.

（A）2400　　（B）3600　　（C）90　　（D）180

（6）在$(x-\sqrt{3})^{10}$的展开式中，x^6 的系数是（　　）.

（A）5670　　（B）670　　（C）−1890　　（D）1890

（7）二项式$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$的展开式中，中间项是（　　）.

（A）$(-1)^{n+1}\mathrm{C}_{2n}^{n+1}$　　（B）$(-1)^{n}\mathrm{C}_{2n}^{n-1}$　　（C）$(-1)^{n}\mathrm{C}_{2n}^{n}$　　（D）C_{2n}^{n}

（8）一袋中装有形状、大小都相同的 4 个球：1 个白球，1 个红球，2 个黄球，从袋中一次性随机摸出 2 个球，则这 2 个球颜色不同的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{3}{5}$　　（B）$\dfrac{4}{5}$　　（C）$\dfrac{2}{3}$　　（D）$\dfrac{5}{6}$

（9）5 支球队参加比赛，每两队之间比赛一场，共进行比赛的场数是（　　）.

（A）6　　（B）8　　（C）10　　（D）12

（10）甲、乙、丙三人值三天班，每天任意安排 1 人，每人只去一天，甲排在第一天的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{6}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{4}$

（11）某单位有老、中、青年职工共计 430 人，其中青年职工 160 人，中年职工人数是

老年职工人数的 2 倍．为了解职工身体状况，现采用分层抽样方法进行调查，在抽取的样本中有青年职工 32 人，则该样本中的老年职工人数为（　　）．

（A）9　　（B）18　　（C）27　　（D） 36

（12）将卷号为 1～4 的四卷文集按任意顺序排放在书架的同一层上，则自左到右卷号顺序恰为 1，2，3，4 的概率等于（　　）．

（A）$\frac{1}{8}$　　（B）$\frac{1}{12}$　　（C）$\frac{1}{16}$　　（D）$\frac{1}{24}$

（13）有 6 位同学排成一行，其中甲必须在乙的左边（可以相邻也可以不相邻）的排法有（　　）种．

（A）720　　（B）360　　（C）240　　（D）120

（14）甲、乙两人在同样条件下练习射击，每人打 5 发子弹，命中环数如下：
甲：8，8，9，9，8；乙：10，7，7，7，9．则两人射击成绩的稳定程度是（　　）．

（A）甲比乙稳定　　（B）乙比甲稳定

（C）甲、乙稳定程度相同　　（D）无法进行比较

（15）从甲、乙、丙、丁四位运动员中选一位成绩稳定的优秀选手，参加奥运会射击项目选拔赛，四人的平均成绩和方差如表 9-4 所示．

表 9-4

	甲	乙	丙	丁
平均数：$\overline{x}$	8.5	8.8	8.8	8
方差：s^2	3.5	3.5	2.1	8.7

则参加奥运会射击项目选拔赛的最佳人选应为（　　）．

（A）甲　　（B） 乙　　（C）丙　　（D）丁

（16）某个容量为100的样本的频率分布直方图如图9-5所示，则在区间 [4，5) 上的数据的频数为（　　）．

（A）40　　（B）25

（C）10　　（D）30

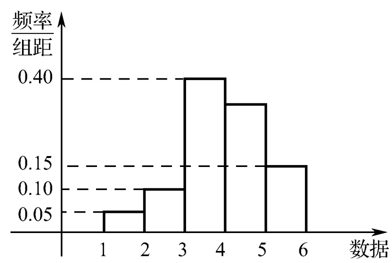


图 9-5

（17）为了调查某产品的销售情况，销售部门从下属的 92 家销售连锁店中抽取 30 家了解情况．若用系统抽样法，则抽样间隔和随机剔除的个体数分别为（　　）．

（A）2，3　　（B）3，2

（C）2，30　　（D）30，2

（18）已知$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$展开式中，第 6 项是（　　）．

（A）$\frac{6}{x^4}$　　（B）$-\frac{6}{x^4}$　　（C）$\frac{1}{x^4}$　　（D）$-\frac{1}{x^4}$

（19）$(2x-1)^5$ 的二项展开式中 x^3 的系数是（　　）．

（A）-80　　（B）80　　（C）-10　　（D）10

2．填空题

（1）将 6 本不同的书分给三名学生，其中甲 3 本，乙 2 本，丙 1 本，则不同分法种数为______.

（2）某班在星期一上午需要安排语文、数学、英语、政治四节课，如果语文老师因事不能上第一节课，那么不同排课的方法共有________种.

（3）已知$\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式的第三项系数是15，则展开式中含有$x^2$项的系数是___________.

（4）已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，则$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=$___________.

（5）用数字 1，2，3，4，5 可以组成___________个无重复数字的四位偶数.

（6）某学校学生会干部由一年级 11 人、二年级 5 人、三年级 4 人组成，现从中任选两人去参加义务劳动，则两人不属于同一年级的概率为____________.

（7）某小组共有 10 名学生，其中女生 3 名，现选举 2 名代表，至少有 1 名女生当选的概率为________.

（8）在 50 件产品中有 4 件次品，从中任意抽出 5 件，则至少有 2 件次品的概率是____.

（9）某校有 4000 名学生，各年级男生、女生人数如表 9-5 所示，已知在全校学生中随机抽取一名“献爱心”志愿者，抽到高一男生的概率是 0.2．现用分层抽样的方法在全校学生中抽取 100 名志愿者，则在高二抽取的学生人数为___________.

表 9-5

	高一	高二	高三
女生	600	y	650
男生	x	z	750

（10）已知样本：

10，8，6，10，13，8，10，12，11，7，8，9，11，9，12，9，10，11，12，9，

那么在范围 11.5～13.5 的频率为___________.

3．学校组织一项活动，要从 5 名男生、3 名女生中选 4 名，

（1）若甲生必须去，有多少种选法？

（2）若甲、乙至少要有 1 人必须去，有多少种选法？

（3）最多有 1 名女生的选法有多少种？

4．求下列各情况的概率：

（1）6 名男生、2 名女生排成一排，恰好 2 名女生相邻．

（2）6 名男生、2 名女生排成一排，恰好 2 名女生不相邻．

（3）3 名男生、4 名女生排成一排，恰好相同性别者相邻．

（4）4 名男生、4 名女生排成一排，恰好相同性别者不相邻．

5．在$(2-3x)^8$ 的二项展开式中，

（1）求二项式系数最大的项．

（2）求含有 x^3 的项的二项式系数．

（3）求所有项的系数之和．

6．为了解学生身高情况，某校以 5%的比例对全校 2000 名学生按性别进行分层抽样调查，测得身高情况的统计如图 9-6 所示：

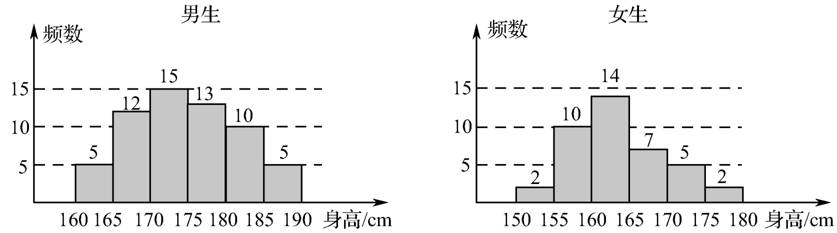


图 9-6

（1）估计该校男生的人数.

（2）估计该校学生身高在 170～185 cm 之间的概率.

（3）从样本中身高在 180～190 cm 之间的男生中任选 2 人，求至少有 1 人身高在 185～190 cm 之间的概率.

7．有 7 件产品，其中有 3 件是次品，现从中任意抽取 3 件．求：

（1）恰有 1 件次品的概率.

（2）至少有 2 件次品的概率.

（3）有 3 件次品的概率.

测 试 题 九

（时间为 90 分钟，共 100 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分）

1．电视台连续播放 6 个广告，其中含 4 个不同的商业广告和 2 个不同的公益广告，要求首尾必须播放公益广告，则共有不同播放方式（　　）．

（A）24 种　（B）48 种　（C）120 种　（D）720 种

2．有 5 名学生站成一排照相，其中甲、乙两人必须站在一起的排法有（　　）．

（A）$A_3^2 \cdot A_2^2$ 种　（B）$3A_2^2$ 种　（C）$2A_3^3$ 种　（D）$A_4^4 \cdot A_2^2$ 种

3．一个口袋内有 4 个红球，4 个白球，2 个黑球，从中任取 3 个，则取到 2 个红球和 1 个白球的概率是（　　）．

（A）$\frac{1}{5}$　（B）$\frac{3}{10}$　（C）$\frac{3}{8}$　（D）1

4．用 0，1，2，3，4 这 5 个数字，可组成没有重复数字的三位数的个数为（　　）．

（A）48　（B）96　（C）60　（D）12

5．从 8 名女生和 4 名男生中，任意选取 2 名女生和 1 名男生参加某档电视节目，则不同选取方法的种数是（　　）．

（A）224　（B）112　（C）56　（D）28

6．现有 3 名男生 2 名女生，从中任选 2 名男生和 1 名女生组成班委会并担任不同的职务，则不同安排方法的种数是（　　）．

（A）48　（B）27　（C）24　（D）36

7．有 4 位同学利用暑假准备到泰安、曲阜、青岛三个城市旅游，如果每人任意选择一个城市，则恰有 2 个同学选择同一个城市的概率是（　　）．

（A）$\frac{4}{27}$　（B）$\frac{8}{27}$　（C）$\frac{4}{9}$　（D）$\frac{8}{9}$

8．二项式$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{16}$的展开式中，常数项为（　　）．

（A）第 7 项　（B）第 8 项　（C）第 9 项　（D）第 10 项

9．二项式$(x-1)^{11}$的展开式中，偶数项的系数之和等于（　　）．

（A）1024　（B）−1024　（C）2048　（D）2047

10．$(x+2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数是（　　）．

（A）20　（B）40　（C）80　（D）160

11．掷两个骰子，设事件 A 为“点数和恰好为 6”，则 A 所包含的基本事件的个数是（　　）．

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5

12．若 20 件产品中有 16 件一级品，4 件二级品．从中任取 2 件，这 2 件中至少有 1 件二级品的概率是（ ）．

（A）$\frac{7}{19}$ （B）$\frac{32}{95}$ （C）$\frac{41}{190}$ （D）$\frac{3}{95}$

13．从数字 1，2，3，4，5 这五个数中，随机抽取 2 个不同的数，则这 2 个数的和为偶数的概率是（ ）．

（A）$\frac{1}{5}$ （B）$\frac{2}{5}$ （C）$\frac{3}{5}$ （D）$\frac{4}{5}$

14．为了解参加知识竞赛的 1252 名学生的成绩，决定采取系统抽样的方法抽取一个容量为 50 的样本，那么应从总体中随机剔除的个体的数目是（ ）．

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5

15．某校选修乒乓球课程的学生中，高一年级有 30 名，高二年级有 40 名．现用分层抽样的方法在这 70 名学生中抽取一个样本，已知在高一年级的学生中抽取了 6 名，则在高二年级的学生中应抽取的人数为（ ）．

（A）6 （B）8 （C）10 （D）12

16．若 $(a+b)^n$ 展开式的第 4 项与第 7 项的系数相等，则此展开式共有（ ）．

（A）8 项 （B）9 项 （C）10 项 （D）11 项

17．一组数据：5，7，7，a，10，11，它们的平均值是 8，则其标准差是（ ）．

（A）8 （B）4 （C）2 （D）1

18．从 4 名男生和 3 名女生中选出 4 人参加某个座谈会，若这 4 人中必须既有男生又有女生，则不同的选法共有（ ）种．

（A）140 （B）34 （C）35 （D）120

19．先后抛掷硬币三次，则至少一次正面朝上的概率是（ ）．

（A）$\frac{1}{8}$ （B）$\frac{3}{8}$ （C）$\frac{5}{8}$ （D）$\frac{7}{8}$

20．刘翔在出征雅典奥运会前刻苦进行 110 米跨栏训练，教练对他 10 次的训练成绩进行分析，判断他的成绩是否稳定，则教练需要知道刘翔这 10 次成绩的（ ）．

（A）众数 （B）方差 （C）平均数 （D）频数

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21. 某小组有 6 名同学，他们计划利用端午节的三天假期到敬老院服务，每天安排 2 人，每人只去一天，则不同的安排方法共有______________．

22．有五张卡片，分别写着 2，3，4，5，6 这五个数，从中任取三张组成三位数.如果写着 6 的卡片也可以当 9 用，那么共可组成____________个不同的三位数.

23．$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^8$ 展开式的中间项是______________．

24．如表 9-6 所示，将容量为 100 的样本数据按从小到大的顺序分为 8 组：

表 9-6

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	10	13	14	14	15	13	12	9

第三组的频率为____________.

25．一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10 000 人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如图 9-7 所示）．为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这 10 000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查，则在[2500，3500)（元）月收入段应抽出____________人．

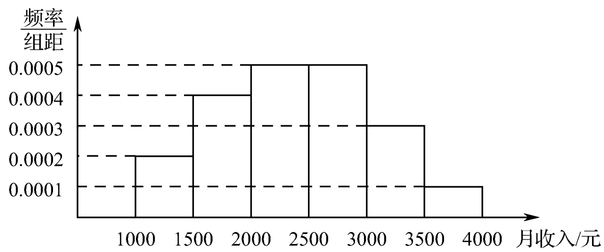


图 9-7

三、解答题（本大题共 3 个小题，共 20 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（8 分）把 6 本不同的书 A，B，C，D，E，F 放于书架上，按下列不同要求排成一排．求各有多少种不同的排法．

（1）A 必须排在左端，并且 F 不能排在右端．

（2）A 与 F 都不能排在两端．

（3）A 与 B 排在一起，并且 C 与 D 排在一起．

（4）A，B，C 两两不相邻．

27．（6 分）一个坛子里有 5 个小球，其中 3 个红球，2 个白球．

（1）从中任取两个球，都是白球的概率是多少？

（2）连续取两次，每次无放回地取 1 个球，两个都是白球的概率是多少？

（3）连续取两次，每次有放回地取 1 个球，两个都是白球的概率是多少？

（4）从中任取两个球，至少有一个白球的概率是多少？

28．（6 分）从甲、乙两名学生中选拔一人参加射击比赛，对他们的射击水平进行了测试，两个人在相同条件下各射击 10 次，命中的环数如下：

甲：7，8，6，8，6，5，9，10，7，4；

乙：9，5，7，8，7，6，8，6，7，7．

（1）计算甲、乙两人射击命中环数的平均数．

（2）比较两人的成绩，然后决定选择哪一人参赛．

如果一个人有足够的信念，就能创造奇迹。

第十章

综合检测题

综合检测题（一）

（时间为 120 分钟，满分为 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将符合题目要求的选项选出）

1．已知 U 表示全集，集合 $M=\{-1，1\}$，$\complement_U M=\{0\}$，集合 $N=\{-1\}$，则 $M\cap\complement_U N$ 等于（　　）．

（A）$\{-1，1\}$　　（B）$\{0，1\}$　　（C）$\{1\}$　　（D）$\{0\}$

2．不等式$|x+1|>5$ 的解集是（　　）．

（A）$(-6，4)$　　（B）$(-4，6)$

（C）$(-\infty，-6)\cup(4，+\infty)$　　（D）$(-\infty，-4)\cup(6，+\infty)$

3．已知 p：$\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；$q$：$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$．则 p 是 q 的（　　）．

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

4．已知点 $A(-1，1)$，$B(-4，5)$，若 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BA}$，则点 C 的坐标是（　　）．

（A）$(-10，13)$　　（B）$(9，-12)$　　（C）$(-5，7)$　　（D）$(5，-7)$

5．若点 $A(-1，3)$和点 $B(2，4)$分布在直线 $ax+3y-2=0$ 的两侧，则实数 a 的取值范围是（　　）．

（A）$(-5，7)$　　（B）$(-7，5)$

（C）$(-\infty，-5)\cup(7，+\infty)$　　（D）$(-\infty，-7)\cup(5，+\infty)$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$，则 $f(f(-2))$的值为（　　）.

（A）2　　（B）-2　　（C）-4　　（D）4

7．在△ABC 中，AB=3，BC=4，△ABC 的面积是 $3\sqrt{3}$，则角 B 等于（　　）.

（A）60°　　（B）60°或 120°　　（C）30°　　（D）30°或 150°

8．过点(3，−5)且平行于向量 $\boldsymbol{v}$=(1，2)的直线方程为（　　）.

（A）$x+2y+7=0$　　（B）$2x+y+7=0$

（C）$x-2y-11=0$　　（D）$2x-y-11=0$

9．$\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的二项展开式中的常数项是（　　）.

（A）−20　　（B）20　　（C）−160　　（D）160

10．从 1，2，3，4，5 这五个数中任取两个数，积为偶数的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{2}{5}$　　（C）$\dfrac{1}{10}$　　（D）$\dfrac{7}{10}$

11．设 $0<\log_a 2<1$，则 a 的取值范围是（　　）.

（A）$0<a<1$　　（B）$a>1$　　（C）$a>2$　　（D）$0<a<2$

12．已知函数 $f(x)=2^{kx}$，$g(x)=\log_3 x$，若 $f(-1)=g(9)$，则实数 k 的值是（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）−1　　（D）−2

13．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是（　　）.

（A）$\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

14．若$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，则角α的值是（　　）.

（A）$\dfrac{\pi}{6}$或$-\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$-\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$或$-\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$-\dfrac{\pi}{6}$

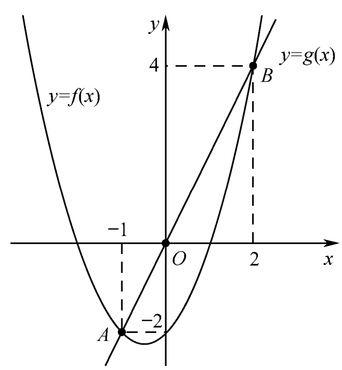
15．如综图 1-1 所示，二次函数 $y=f(x)$与一次函数 $y=g(x)$的图像交于 $A(-1，-2)$，$B(2，4)$的两点，则使 $f(x)>g(x)$的 x 的取值范围是（　　）.

（A）$(-\infty，-1)$

（B）$(-1，2)$

（C）$(-2，4)$

（D）$(-\infty，-1)\cup(2，+\infty)$



综图 1-1

16．若直线 $y=x+m$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有交点，则 m 的取值范围是（　　）.

（A）$(-2，2)$　　（B）$[-2，2]$

（C）$(-2\sqrt{2}，2\sqrt{2})$　　（D）$[-2\sqrt{2}，2\sqrt{2}]$

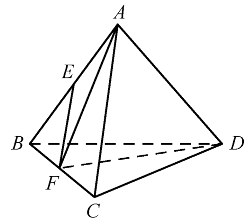
17．如综图 1-2 所示，在正四面体 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AB，BC 的中点，则下列结论错误的是（　　）．

（A）异面直线 AB 与 CD 所成的角为 $90°$

（B）直线 AB 与平面 BCD 成的角为 $60°$

（C）直线 EF//平面 ACD

（D）平面 AFD 垂直平面 BCD



综图 1-2

18．若 5 个人排成一排照相，其中甲、乙两人相邻的排法有（　　）．

（A）48　　（B）60　　（C）120　　（D）72

19．方程 $x^2-bx-c=0$ 的两根为−2，3，则不等式 $bx^2-x-c>0$ 的解集为（　　）．

（A）（−2，3）　　（B）$(-\infty，-2)\cup(3，+\infty)$

（C）（−3，2）　　（D）$(-\infty，-3)\cup(2，+\infty)$

20．若抛物线上一点到焦点与到 y 轴的距离之差为 2，且焦点在 x 轴上，则抛物线的标准方程为（　　）．

（A）$y^2=4x$　　（B）$y^2=8x$ 或 $y^2=-8x$

（C）$y^2=-4x$　　（D）$y^2=8x$

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．已知 a，b，c，d 成等比数列，且曲线 $y=x^2-2x+3$ 的顶点是$(b，c)$，则 ad 等于_____．

22．已知α为锐角，若 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\tan\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$________．

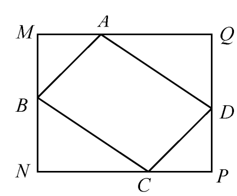
23．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1$ 的一个焦点为(3，0)，则双曲线的渐近线方程是________．

24．已知圆锥的母线长为 5，底面周长为 6π，则它的体积是________．

25．要从 800 名学生中抽取 40 名进行视力调查，拟采用系统抽样的方法，为此将他们逐一编号为 1～800，并对编号进行分段，若从第一个号码段中随机抽取的号码是 15，则从第 4 个号码段抽出的号码应该是___________．

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 40 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）如综图 1-3 所示，在一个长 80 cm、宽 60 cm 的矩形 $MNPQ$ 上，截取一个平行四边形 $ABCD$，且 $MA=MB=PC=PD$，求平行四边形 $ABCD$ 的最大面积．



综图 1-3

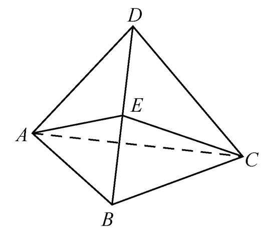
27.（7 分）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知公比 $q>0$，且 $a_2=1$，$a_3+a_4=12$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（2）若 $b_n=\log_3 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项的和 S_{20}.

28.（8 分）如综图 1-4 所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$CB=CD$，E 为 DB 中点.

求证：平面 $AEC\perp$平面 ABD.



综图 1-4

29.（9 分）已知函数 $y=2\sin x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)+\sqrt{3}$，$x\in\mathbf{R}$.

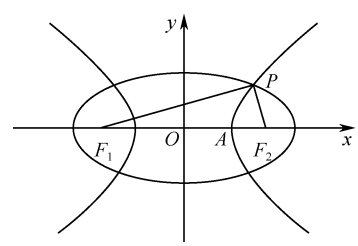
（1）求函数的最小正周期 T.

（2）若 $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，求函数的最小值.

30.（9 分）如综图 1-5 所示，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 与双曲线有共同焦点 F_1，F_2，点 P 是椭圆与双曲线的右支在第一象限内的交点，并且点 $A(2，0)$是双曲线的右顶点.

（1）求双曲线的方程.

（2）求 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$.



综图 1-5

综合检测题（二）

（时间为 120 分钟，满分为 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将符合题目要求的选项选出）

1．已知集合 $M=\{x|x^2-x=0\}$，集合 $N=\{x|x^2+m=0\}$，且 $M\cap N=\{1\}$，则 $M\cup N$ 等于（　　）．

（A）$\{0，1\}$　　（B）$\{-1，0，1\}$

（C）$\{-1，1\}$　　（D）$\{-1，0，1，2\}$

2．函数 $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$ 的定义域是（　　）．

（A）$\{x|x\leqslant 1\}$　　（B）$\{x|x\geqslant 1\}$

（C）$\{x|x\geqslant -1\}$　　（D）$\{x|x\leqslant -1$ 且 $x\neq -2\}$

3．已知函数 $g(x)$是偶函数，且 $f(x)=g(x)-2x$，若 $f(-2)=0$，则 $f(2)$的值是（　　）．

（A）-4　　（B）0

（C）8　　（D）-8

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x+2}, x\leqslant 2\\ \log_{0.5}(x-1), x\geqslant 2\end{cases}$，则 $f[f(5)]=$（　　）．

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）-2

5．已知 $\log_{0.5}b<\log_{0.5}a<\log_{0.5}c$，则（　　）．

（A）$2^b>2^a>2^c$　　（B）$2^a>2^b>2^c$　　（C）$2^c>2^b>2^a$　　（D）$2^c>2^a>2^b$

6．已知 10 件产品中有 2 件次品，从中任取 3 件，则恰好含有 1 件次品的不同取法的种数是（　　）．

（A）56　　（B）112　　（C）224　　（D）448

7．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，若 a，b，c 成等比数列，且 $c=2a$，则 $\cos B$ 的值是（　　）．

（A）$-\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

8．圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，则实数 a 的值是（　　）．

（A）$-\dfrac{4}{3}$　　（B）$-\dfrac{3}{4}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

9．如果 $\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}$，那么 $\sin(\pi-x)$的值为（　　）．

（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$-\dfrac{8}{9}$　　（C）$\pm\dfrac{8}{9}$　　（D）$\pm\dfrac{2}{3}$

10．过点 $B(3，4)$且与直线 $3x-2y-7=0$ 垂直的直线方程是（　　）．

（A）$2x+3y+18=0$　　（B）$2x+3y-18=0$

（C）$3x+2y-18=0$　　（D）$3x-2y-18=0$

11．下列命题正确的是（　　）．

（A）$ab=0$ 是 $a=0$ 的充分不必要条件　　（B）$ac^2>bc^2$ 是 $a>b$ 的必要不充分条件

（C）$\alpha=30°$ 是 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 的充要条件　　（D）$a>b$ 是 $2^a>2^b$ 的充要条件

12．若 x_1，x_2 是方程 $2x^2-bx+c=0$ 的两个根，则函数 $f(x)=2x^2-bx+c$ 可表示为（　　）．

（A）$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$　　（B）$f(x)=2(x-x_1)(x-x_2)$

（C）$f(x)=(x+x_1)(x+x_2)$　　（D）$f(x)=2(x+x_1)(x+x_2)$

13．已知等边△ABC 的边长为 2，则 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{BC}$ 等于（　　）．

（A）-2　　（B）0　　（C）-4　　（D）4

14．在等差数列$\{a_n\}$中，若 $S_3=6$，$a_1=4$，则公差 d 等于（　　）．

（A）1　　（B）$\dfrac{5}{3}$　　（C）-2　　（D）3

15．已知 $\boldsymbol{a}=(3，4)$，$\boldsymbol{b}=(8，6)$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的值是（　　）．

（A）$(-5，-2)$　　（B）$(-2，2)$　　（C）$(11，10)$　　（D）$(2，-2)$

16．在 45° 的二面角的一个平面内有一点到棱的距离为 1，则它到另一个面的距离是（　　）．

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　（C）1　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

17．与直线 $2x-y+4=0$ 平行且与抛物线 $y=x^2$ 相切的直线方程为（　　）．

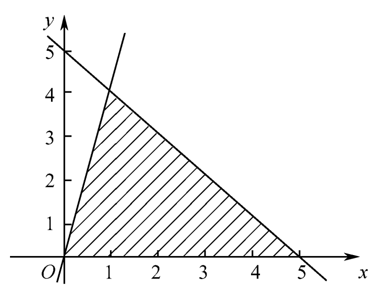
（A）$2x-y+3=0$　　（B）$2x-y-3=0$

（C）$2x-y+1=0$　　（D）$2x-y-1=0$

18．变量 x，y 满足的约束条件 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0\\4x-y\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，可行域如综图 2-1 所示，则目标函数 $z=-2x+y$ 的最大值是（　　）．

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4



综图 2-1

19．二项式 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-x\right)^6$ 的展开式中，常数项的二项式系数是（　　）．

（A）6　　（B）15　　（C）20　　（D）不存在

20．从 4 名男生和 3 名女生中选 4 人参加奥帆赛志愿者服务，4 人中既有男生又有女生的概率是（　　）．

（A）$\dfrac{4}{35}$　　（B）$\dfrac{12}{35}$　　（C）$\dfrac{18}{35}$　　（D）$\dfrac{34}{35}$

二、**填空题**（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．已知函数 $f(x)=ax^4+b\cos x-x$，且 $f(-3)=7$，则 $f(3)=$______．

22．已知下列数据：

423，421，419，420，421，417，422，419，423，418

这组数据的标准差是______（结果精确到 0.01）．

23．若圆柱的底面半径和高均为 1，则该圆柱的表面积为______．

24．如果 $\boldsymbol{a}=(\cos x, \sin x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x+\sqrt{3}\sin x, \sin x-\sqrt{3}\cos x)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 的值是______．

25．椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1|=4$，则 $\angle F_1PF_2=$______．

三、**解答题**（本大题共 5 个小题，共 40 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2=-8$，$a_5=27$，求这个数列的首项 a_1 及公比 q．

27．（7 分）已知函数 $f(x)=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），函数在区间 $[-3, 5]$ 上最大值和最小值的乘积是 $\dfrac{1}{4}$．求：

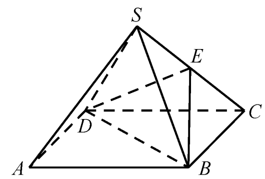
（1）实数 a 的值．

（2）满足不等式 $\log_a(4-2m)\geqslant1$ 的实数 m 的取值范围．

28.（8 分）如综图 2-2 所示，已知正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面边长 AB=2cm，侧棱与底面所成的角是 45°，E 是侧棱 SC 的中点.

（1）求证：SA∥平面 BED.

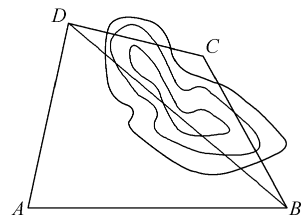
（2）求正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的体积.



综图 2-2

29.（9 分）如综图 2-3 所示，要计算西湖岸边两景点 B 与 C 的距离，由于地形的限制，需要在岸上选取 A 和 D 两点，现测得 $AD\perp CD$，AD=10 km，AB=14 km，$\angle BAD$=60°，$\angle BCD$=135°.

求两景点 B 与 C 的直线距离（精确到 0.1 km）.



综图 2-3

30.（9 分）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，以原点为圆心、以椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切.

（1）求椭圆的方程.

（2）如果过点 $M(2，0)$的直线与椭圆相交于 A，B 两点，$|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，求直线 AB 的方程.

综合检测题（三）

（时间为 120 分钟，满分为 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将符合题目要求的选项选出）

1．若集合 $M=\{1，2，3，4\}$，$N=\{1，2，3\}$，则下列关系中正确的是（　　）．

（A）$M\cap N=M$　　（B）$M\cup N=N$

（C）$N\subsetneqq M$　　（D）$N\supsetneqq M$

2．不等式$|x|-1>1$ 的解集是（　　）．

（A）$(-2，2)$　　（B）$(-1，1)$

（C）$(-\infty，-1)\cup(1，+\infty)$　　（D）$(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$

3．已知函数 $f(x)$是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+2$，则 $f(-1)$的值是（　　）．

（A）-3　　（B）-1　　（C）1　　（D）3

4．对于命题 p，q，若 $p\wedge q$ 是假命题，$p\vee q$ 是真命题，则为真命题的是（　　）．

（A）$\neg p\wedge q$　　（B）$p\vee\neg q$

（C）$\neg p\wedge\neg q$　　（D）$\neg p\vee\neg q$

5．若 $a>b>0$，则下列不等式不正确的是（　　）．

（A）$2^{-a}<2^{-b}$　　（B）$0.2^{-a}>0.2^{-b}$

（C）$\log_{0.2}a<\log_{0.2}b$　　（D）$\log_2 a<\log_2 b$

6．若$\varphi(x)$，$g(x)$都是奇函数，$f(x)=a\varphi(x)+bg(x)+2$ 在（0，$+\infty$）上有最大值 5，则 $f(x)$在（$-\infty$，0）上有（　　）．

（A）最大值-5　　（B）最小值-5　　（C）最小值-1　　（D）最大值-3

7．函数 $y=\cos\alpha+\sin\alpha$，$\alpha\in[0，\pi]$的最小值等于（　　）．

（A）-2　　（B）-1　　（C）$-\sqrt{2}$　　（D）0

8．某数学课外小组有 10 名男生和 5 名女生，从中选 3 名同学参加数学竞赛，其中至少有一名女生的概率是（　　）．

（A）$\dfrac{24}{91}$　　（B）$\dfrac{45}{91}$　　（C）$\dfrac{67}{91}$　　（D）$\dfrac{20}{91}$

9．已知 a，b，c，d 是公比为 2 的等比数列，则$\dfrac{2a+b}{2c+d}$等于（　　）．

（A）1　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{1}{4}$　　（D）$\dfrac{1}{8}$

10．已知角α的终边经过点 $P(1，1)$，则 $\cos 2\alpha$ 的值等于

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11．经过圆$(x-2)^2+(y+1)^2=5$的圆心，且平行于向量$\boldsymbol{v}=(3，2)$的直线方程是（　　）．

（A）$2x-3y+7=0$　　（B）$3x-2y-8=0$

（C）$2x-3y-7=0$　　（D）$2x-3y-1=0$

12．设向量$\boldsymbol{a}=(m，1)$，$\boldsymbol{b}=(1，2)$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，则实数$m$的值是（　　）．

（A）0　　（B）2　　（C）-2　　（D）-4

13．在$(1-x)^5$的二项展开式中，含x^3的项是（　　）．

（A）$-10x^3$　　（B）$10x^3$　　（C）$-5x^3$　　（D）$5x^3$

14．过原点且倾斜角为60°的直线被圆$x^2+y^2-4y=0$所截得的弦长为（　　）．

（A）$\sqrt{3}$　　（B）2　　（C）$\sqrt{6}$　　（D）$2\sqrt{3}$

15．已知双曲线$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{k}=1$的离心率是方程$6x^2-13x+5=0$的一个根，则该双曲线的渐近线方程是（　　）．

（A）$y=\pm\dfrac{4}{3}x$　　（B）$y=\pm\dfrac{5}{3}x$　　（C）$y=\pm\dfrac{16}{9}x$　　（D）$y=\pm\dfrac{3}{4}x$

16．下列各命题中是假命题的为（　　）．

（A）平行于同一条直线的两条直线平行

（B）平行于同一个平面的两条直线平行

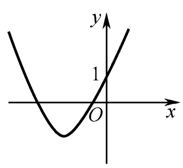
（C）过平面外一点有无数条直线和该平面平行

（D）过直线外一点有无数个平面和该直线平行

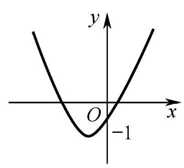
17．已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=6$，$\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=60°$，则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$等于（　　）．

（A）6　　（B）$4\sqrt{3}$　　（C）$2\sqrt{13}$　　（D）$6\sqrt{2}$

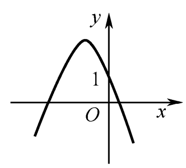
18．如果函数$y=ax+b$的图像在第一、二、三象限内，那么函数$y=ax^2+bx-1$的图像大致是（　　）．



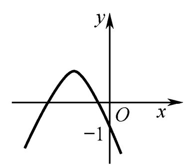
（A）



（B）



（C）



（D）

19．已知变量x，y满足的线性约束条件是$\begin{cases}x\leqslant 4\\ y\leqslant 4\\ x+y-4\geqslant 0\end{cases}$，则目标函数$z=2x+3y$的最大值等于（　　）．

（A）20　　（B）24　　（C）16　　（D）18

20．用0，1，2，3，4这五个数字组成无重复数字的两位数，其中偶数的个数是（　　）

（A）8　　（B）10　　（C）12　　（D）15

二、**填空题**（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．已知 $y=\log_a|x|$在$(-\infty，0)$上是减函数，则 a 的取值范围是______．

22．在△ABC 中，若 $AC=5$，$\angle A=120°$，三角形的面积为$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$，则 BC 的长度为____．

23．已知一个球的体积为 36π，经过球心的平面把这个球分为两部分，其中一部分的表面积为_______________．

24．椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$上一点 P 到一个焦点的距离为 3，则点 P 到另一个焦点的距离为______．

25．某单位有职工 750 人，其中青年职工 350 人，中年职工 250 人，老年职工 150 人，为了了解该单位职工的健康情况，用分层抽样的方法从中抽取样本．若样本中的青年职工为 7 人，则样本容量为______．

三、**解答题**（本大题共 5 个小题，共 40 分，解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）已知角 A 为锐角，向量 $\boldsymbol{m}=(\sin A，\cos A)$，向量 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}，-1)$，且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$．

（1）求角 A；

（2）求函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos x+2\cos A\sin x$ （$x\in\mathbf{R}$）的最大值及取得最大值时 x 的取值集合．

27．（7 分）小明大学毕业后，想进行为期一年的企业实践锻炼，现有甲、乙两家公司可以选择．甲公司给出的初始月薪为 1500 元，以后每月比上一个月增长 100 元；乙公司给出的初始月薪为 1000 元，以后每月比上一个月增长 10%．若只考虑收入，小明应选择哪家公司？

28．（8 分）已知一元二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像经过点(1，−1)和点(0，2)，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+4)=f(-x)$，且满足函数．

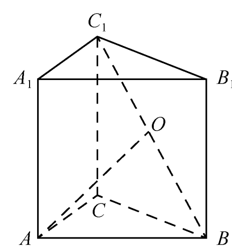
（1）求函数 $f(x)$的解析式．

（2）求满足 $f(x)\leqslant 7$ 的 x 的取值集合．

29．（9 分）如综图 3-1 所示，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=AA_1=1$，O 是 BC_1 的中点．

（1）求 AC 与 BC_1 所成角的余弦值．

（2）求证：$BC\perp AO$．



综图 3-1

30．（9 分）已知双曲线的中心在坐标原点，焦点 F_1，F_2 在坐标轴上，离心率为 $\sqrt{2}$，且过点$(2，-\sqrt{2})$．

（1）求双曲线的方程．

（2）若点 M 在第一象限且是渐近线上的点，当 $MF_1\perp MF_2$，求点 M 的坐标．

（3）求△MF_1F_2 的面积．

综合检测题（四）

（时间为 120 分钟，满分为 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将符合题目要求的选项选出）

1．设集合 $A=\{x\mid x>1\}$，集合 $B=\{x\mid x<3\}$，则 $A\cap B=$（　　）．

（A）$\mathbf{R}$　　（B）$\{x\mid 1<x<3\}$

（C）$\{x\mid x>1\}$　　（D）$\{x\mid x<3\}$

2．$x=-1$ 是 $x^2+x=0$ 的（　　）．

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

3．设 $a>b$，则下列不等式错误的是（　　）．

（A）$b<a$　　（B）$a+3>b+3$

（C）$a-10>b-10$　　（D）$-3a>-3b$

4．函数 $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{x}$ 的定义域是（　　）．

（A）$(-\infty,1)$　　（B）$(-\infty,0)$

（C）$(-\infty,0)\cup(0,1]$　　（D）$(-\infty,0)\cup(0,1)$

5．在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_3+a_{10}=30$，则 S_{12} 等于（　　）．

（A）45　　（B）75　　（C）180　　（D）810

6．过点 $P(1,2)$与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线方程为（　　）．

（A）$x-2y+7=0$　　（B）$x-2y+5=0$

（C）$x+2y-5=0$　　（D）$x+2y-\sqrt{5}=0$

7．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(x,1)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则实数 x 的值是（　　）．

（A）2　　（B）-2　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$-\dfrac{1}{2}$

8．过直线 $x+y=2$ 与 $x-y=0$ 的交点，且与直线 $2x+y-1=0$ 平行的直线方程为（　　）．

（A）$2x+y-3=0$　　（B）$2x+y+3=0$

（C）$x-2y-3=0$　　（D）$x-2y+3=0$

9．已知 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{4}$，$\tan\beta=-3$，则 $\tan\alpha$ 的值是（　　）．

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）1　　（C）13　　（D）11

10．在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$，$a_6=54$，则公比 q 等于（　　）．

（A）2　　（B）3　　（C）9　　（D）27

11．下列命题中，正确的是（　　）．

（A）空间中两组对边分别相等的四边形是平行四边形

（B）与同一平面所成的角相等的两条直线共面

（C）过不在两条异面直线上的任意一点，存在一个平面与两条异面直线都平行

（D）如果一个平面垂直于另一个平面的一条垂线，则这两个平面平行

12．已知 F 是抛物线 $y^2=x$ 的焦点，A，B 是该抛物线上的两点，$|AF|+|BF|=3$，则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为（　　）．

（A）$\dfrac{3}{4}$　　（B）1　　（C）$\dfrac{5}{4}$　　（D）$\dfrac{7}{4}$

13．在 20 件产品中，有 15 件正品，5 件次品，从中任意取 3 件，其中没有次品的概率是（　　）．

（A）0.008 8　　（B）0.131 6　　（C）0.399 1　　（D）0.600 9

14．4 名男生和 2 名女生站成一排照相，若 2 名女生恰好站在两端，则不同排法的种数是（　　）．

（A）24　　（B）36　　（C）48　　（D）720

15．设函数 $f(x)=x+(a-1)x^2+x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，则 $f(2)$的值等于（　　）．

（A）4　　（B）6　　（C）8　　（D）10

16．函数 $f(x)=3\cos^2x-\sin^2x-1$ 的周期、最大值分别是（　　）．

（A）2π，2　　（B）π，2　　（C）2π，1　　（D）π，1

17．函数 $y=(x-1)(x+2)$的对称轴是（　　）．

（A）$x=-1$　　（B）$x=1$　　（C）$x=-\dfrac{1}{2}$　　（D）$x=\dfrac{1}{2}$

18．已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|<0$，q：$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x>0$，则下列是假命题的是（　　）．

（A）$p\vee q$　　（B）$\neg p\vee\neg q$　　（C）$\neg p\wedge q$　　（D）$p\wedge\neg q$

19．$(1-2x)^9$ 的二项式展开式中各项系数之和是（　　）．

（A）2^9　　（B）-2^9　　（C）-1　　（D）1

20．变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\ x-2y+3\geqslant 0\\ x-5\leqslant 0\end{cases}$，则目标函数 $z=x+y$ 的最大值是（　　）．

（A）11　　（B）9　　（C）7　　（D）3

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．在△ABC 中，$AC=5$，$BC=1$，且 $\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则边 AB 的长是______．

22．直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\dfrac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为______．

23．若一个正方体内接于表面积为 16 的球，则该正方体的表面积为______．

24．某社区人均年收入不足 2 万元的家庭有 120 户，人均年收入在 2 万到 5 万元的家庭有 360 户，人均年收入高于 5 万元的家庭有 48 户．计划采用分层抽样的方式，从该社区抽取 22 户家庭作为样本调查购买力情况，则从人均年收入不足 2 万元的家庭中应抽取_______户．

25．若$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$______．

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 40 分．解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）某机械厂生产某种农用机器，计划在 2018 年的第一季度中 1 月产量的基础上，逐月增加相同的产量，后来由于调动了工人的积极性，结果 2、3 月份的实际产量分别比原计划多了 10 台和 25 台，这样三个月的实际产量增长的比率相同，且 3 月份的实际产量只比原计划第一季度总产量的一半少 10 台，求原计划每个月的产量．

27．（7 分）已知函数 $f(x)=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）在区间$[-2，3]$上的最大值是 64．求实数 a 的值．

28．（8 分）已知函数 $y=2\sin x\cos x$．

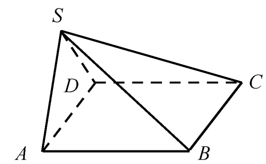
（1）求该函数的最小正周期及最值．

（2）用“五点法”作出该函数在一个周期上的简图．

29.（9 分）如综图 4-1 所示，在四棱锥 S-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，$SA=SD=2$，$AB=3$．

（1）求 SA 与 BC 所成角的余弦值．

（2）求证：$AB\perp SD$．



综图 4-1

30.（9 分）已知 F_1，F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，点 P 在双曲线上且 $PF_1\perp PF_2$，$|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$，经过双曲线的焦点 F_1 的直线 l 与双曲线交于 A，B 两点，且直线 l 的法向量是$(1，-1)$．

（1）求双曲线的标准方程．

（2）求直线 l 的方程．

（3）求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$．

综合检测题（五）

（时间为 120 分钟，满分为 120 分）

一、选择题（本大题共 20 个小题，每小题 3 分，共 60 分．在每小题列出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将符合题目要求的选项选出）

1．若集合 $A=\{1，2，3，4\}$，集合 $B=\{1，5\}$，则 $A\cup B=$（　　）．

（A）$\{1，1，2，3，4，5\}$　　（B）$\{1\}$

（C）$\{2，3，4，5\}$　　（D）$\{1，2，3，4，5\}$

2．“$x=3$”是“$x^2=9$”的（　　）．

（A）充分且不必要条件　　（B）必要且不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

3．过点 $A(0，1)$，且倾斜角是 45°的直线方程为（　　）．

（A）$x-y+3=0$　　（B）$x+y-3=0$

（C）$x-y+1=0$　　（D）$x+y-1=0$

4．下列结论中正确的是（　　）．

（A）命题 p 是真命题时，命题“$p\wedge q$”一定是真命题

（B）命题 p 是假命题时，命题“$p\wedge q$”不一定是假命题

（C）命题“$p\wedge q$”是假命题时，命题 p 一定是假命题

（D）命题“$p\wedge q$”是真命题时，命题 p 一定是真命题

5．已知$(2a-1)^{\frac{1}{3}}>(2a-1)^{\frac{1}{2}}$，则 a 的取值范围是（　　）．

（A）$\frac{1}{2}<a<1$　　（B）$a<1$　　（C）$a>1$　　（D）$0<a<1$

6．已知二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根为−2 和 4，则不等式 $x^2+bx+c<0$ 的解集为（　　）．

（A）$(-\infty，-2)\cup(4，+\infty)$　　（B）$(-2，4)$

（C）$(-\infty，-4)\cup(2，+\infty)$　　（D）$(-4，2)$

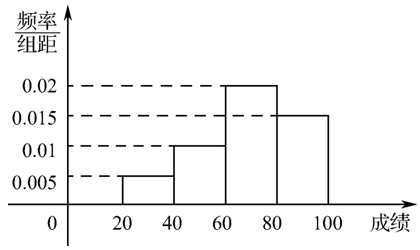
7．设向量 $\boldsymbol{a}=(1，0)$，$\boldsymbol{b}=(-1，m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则实数 m 的值为（　　）．

（A）1　　（B）−1　　（C）2　　（D）−2

8．$(2x-1)^5$ 的二项展开式中 x^3 的系数是（　　）．

（A）−80　　（B）80　　（C）−10　　（D）10

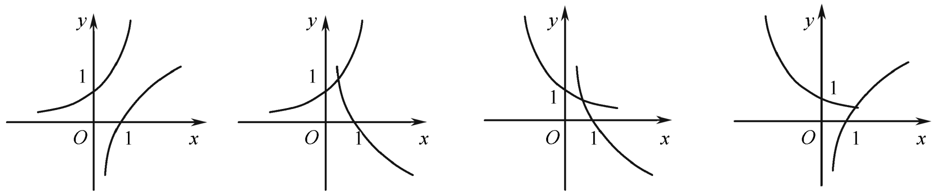
9．某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如综图 5-1 所示，数据的分组依次为[20，40)，[40，60)，[60，80)，[80，100]，若低于 60 分的人数是 15 人，则该班的学生人数是（　　）．



综图 5-1

（A）45　　（B）50　　（C）55　　（D）60

10．在同一坐标系中，当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的图像大致是（　　）．



（A）　（B）　（C）　（D）

11．设 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在［0，$+\infty$)上单调递增，则 $f(2)$，$f(-3)$的大小关系是（　　）．

（A）$f(2)<f(-3)$　　（B）$f(2)>f(-3)$

（C）$f(2)=f(-3)$　　（D）无法确定

12．等比数列$\{a_n\}$前三项和为 7，积为 8，则公比 q 等于（　　）．

（A）2　　（B）2 或$\frac{1}{2}$

（C）$\frac{1}{2}$　　（D）-2 或$-\frac{1}{2}$

13．已知$\alpha=\frac{26}{5}\pi$，则点 $P(\tan\alpha，\sin\alpha)$所在的象限是（　　）．

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

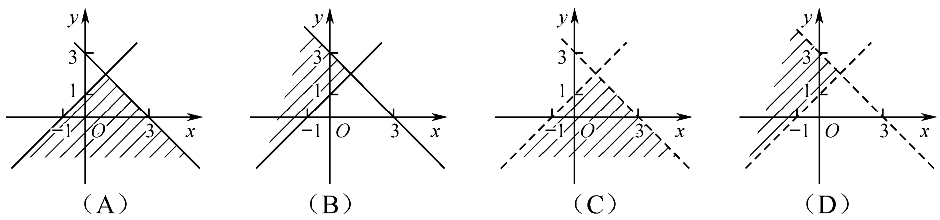
14．已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于（　　）．

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）90°

15．从 0，1，2，3 四个数字中任取 3 个，组成没有重复数字的三位数，其中是 5 的倍数的概率是（　　）．

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）$\frac{7}{20}$

16．不等式组$\begin{cases}x-y+1>0\\x+y-3<0\end{cases}$表示的区域（阴影部分）是（　　）．



17．已知△ABC 中边 $BC=\sqrt{5}$，$AB=2$，$\cos A=\dfrac{2}{3}$，则边 AC=（　　）．

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）3

18．如果圆锥的侧面展开图是半圆面，那么这个圆锥的顶角（圆锥轴截面中两条母线的夹角）是（　　）．

（A）30°　　（B）45°　　（C）60°　　（D）90°

19．直线 $3ax+2y-3=0$ 与直线 $x+y+5=0$ 垂直，则 a 的值是（　　）．

（A）1　　（B）$-\dfrac{1}{3}$　　（C）$-\dfrac{2}{3}$　　（D）−2

20．椭圆 $x^2+4y^2=4$ 的长轴上一个顶点为 A，以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形，该三角形的面积是（　　）．

（A）$\dfrac{16}{25}$　　（B）$\dfrac{9}{25}$　　（C）$\dfrac{25}{16}$　　（D）$\dfrac{25}{9}$

二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分）

21．编排一张由 4 个语言类节目和 2 个舞蹈类节目组成的演出节目单，若要使 2 个舞蹈类节目不相邻，则不同排法的种数是________．

22．已知 $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$，且 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha$ 的值为___________．

23．已知侧面为等边三角形的正三棱锥，若它的体积为$\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$，则其表面积是________．

24．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x<1\\ x^2+ax, & x\geqslant 1\end{cases}$，若 $f(f(0))=4a$，则实数 a 的值是________．

25．设直线 $y=x+2a$ 与圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A，B 两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，则圆 C 的面积是________．

三、解答题（本大题共 5 个小题，共 40 分．解答应写出推理、演算步骤）

26．（7 分）已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(1，0)$，$B(0，-2)$，$C(2，3)$．

（1）求函数的解析式．（2）若 $f(x)>0$，求 x 的取值集合．

27.（7 分）已知$\{a_n\}$为等差数列，且 $a_1+a_3=8$，$a_2+a_4=12$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

（2）记$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列，求正整数 k 的值.

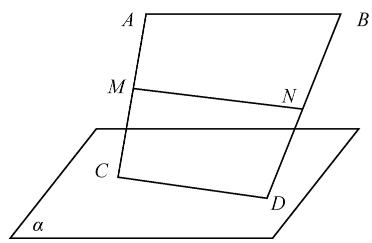
28.（8 分）已知函数 $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\quad(x\in\mathbf{R})$. 求：

（1）函数的最大值、最小值和最小正周期.

（2）使函数取得最大值和最小值的 x 的集合.

29.（9 分）如综图 5-2 所示，直线 AB 与 CD 为异面直线，$CD\subset$ 平面α，AB//平面α，M，N 分别是线段 AC 与 BD 的中点.

求证：MN//平面α.



综图 5-2

30.（9 分）已知椭圆的方程是$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，双曲线的焦点是椭圆的顶点，双曲线的顶点是椭圆的焦点.

（1）求双曲线的标准方程.

（2）若直线 l：$y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线有两个不同的交点 A，B，且满足$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=17$（其中 O 为坐标原点），求 k 值.

答案与提示

习　题　一

1．选择题

（1）C　（2）D　（3）A　（4）C　（5）D　（6）A

（7）C　（8）A　（9）C　（10）A　（11）A　（12）D

2．填空题

（1）①$\notin$　②$\in$　③$\subsetneqq$　④$\subsetneqq$　⑤$\in$　⑥$\supsetneqq$　⑦$\in$　⑧=　⑨=

（2）4　（3）−3　（4）$\{(0，0)，(1，1)\}$

3．解：（1）①$\neg p$：$5+10\times3\neq20$；②$\neg q$：全班同学不都是山东人（或全班中有些同学不是山东人）；③$\neg r$：$\exists\, x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2\neq1$；④$\neg s$：$\forall\, x\in\mathbf{R}$，都有 $x+2\neq3$．

（2）①$a>1$　②$a=0$ 或 $a=1$　③$a<1$ 且 $a\neq0$　（3）2

测 试 题 一

一、选择题

1．C　2．B　3．A　4．C　5．A　6．D　7．D　8．C

9．D　10．D　11．A　12．B　13．A　14．C　15．C

二、填空题

16．$\{2，3，5，7\}$　17．$\{1，7，9\}$　18．$3<2$　19．$(-\infty，1)$　20．充要

三、解答题

21．解：由 $A\cup B=A$ 知 $B\subseteq A$，所以 $x^2=0$ 或 $x^2=2$ 或 $x^2=x$，解得

$x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{2}$ 或 $x=1$．验证 $x=0$ 或 $x=1$ 不满足元素的互异性，故 $x=\pm\sqrt{2}$．

22．$\left(\dfrac{1}{2}，+\infty\right)$　23．0 或 1　24．$[-1，+\infty)$

习　题　二

1．选择题

（1）C　（2）C　（3）D　（4）C　（5）C　（6）D　（7）C　（8）B　（9）D

（10）A　（11）C　（12）D　（13）D　（14）C　（15）B　（16）B　（17）B　（18）B

（19）D　（20）B

2．填空题

（1）$(-\infty,2)$　（2）13　（3）$\left\{x\left|x\neq\frac{8}{3}\right.\right\}$　（4）1　-6　（5）$(-2,1)$

3．提示：因为 $f(x)-g(x)=(x^2+1)^2-(x^4+x^2+x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，所以 $f(x)>g(x)$．

4．$\{x\mid -1<x<0\text{或}2<x<5\}$．

5．解：由题意得 $\begin{cases}4(k-1)^2-4(2k+6)\geqslant 0\\ -2(k-1)>0\\ 2k+6>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k\leqslant -1\text{或}k\geqslant 5\\ k<1\\ k>-3\end{cases}$，

所以 k 的取值范围是 $\{k\mid -3<k\leqslant -1\}$．

6．解：设需要这种零件 x 个，则自产需支出$(800+0.6x)$元，外购需支出 $1.10x$ 元．

（1）当 $1.10x>800+0.6x$，即 $x>1600$ 时，自产划算．

（2）当 $1.10x=800+0.6x$，即 $x=1600$ 时，自产、外购均可．

（3）当 $1.10x<800+0.6x$，即 $x<1600$ 时，外购划算．

7．解：原不等式等价于 $ax>-3$；因为 $a\neq 0$ 时，所以当 $a>0$ 时，不等式的解集为$\left\{x\left|x>-\frac{3}{a}\right.\right\}$；当 $a<0$ 时，不等式的解集为$\left\{x\left|x<-\frac{3}{a}\right.\right\}$．

8．解：（1）∵$A=\{x|x-2<0\}=\{x|x<2\}$，$B=\{x|x^2-4x-5<0\}=\{x|-1<x<5\}$；

∴$A\cap B=\{x|-1<x<2\}$．

（2）∵不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是$\{x|-1<x<2\}$，

∴-1 和 2 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的解，由根与系数的关系得 $\begin{cases}-1+2=-\frac{b}{a}\\ -1\times 2=\frac{2}{a}\end{cases}$，

解得　$a=-1$，$b=1$．

测 试 题 二

一、选择题

1．C　2．B　3．A　4．D　5．C　6．B　7．B　8．D

9．D　10．C　11．B　12．C　13．C　14．D　15．B

二、填空题

16．$(-\infty,-1)$　17．$\left\{x\left|x>\frac{b}{a}\right.\right\}$　18．25　19．2　-1　20．$b\geqslant -\frac{1}{4}$

三、解答题

21．解：由题意知 $x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=-1$．

（1）$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16+2=18$．

（2）$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=4$．

22．解：（1）$a-2=0$，即 $a=2$ 时，原不等式为$-4<0$，不等式恒成立，符合题意；

（2）$a-2\neq0$ 时，原不等式为一元二次不等式，则由题意可知，二次函数 $y=(a-2)x^2+2(a-2)x-4$ 的图像开口向下且与 x 轴无交点，

即 $\begin{cases}a-2<0\\4(a-2)^2+16(a-2)<0\end{cases}$，解得　$-2<a<2$．

综上所述，实数 a 的取值范围是$(-2，2]$．

23．解：（1）由题意知 1 与 b 是方程 $ax^2-3x+2=0$ 的两个根，由韦达定理得

$\begin{cases}1+b=\frac{3}{a}\\1\times b=\frac{2}{a}\end{cases}$，解得　$a=1$，$b=2$．

（2）由（1）得　不等式 $bx^2-3x+a\geqslant0$ 就是 $2x^2-3x+1\geqslant0$，解得 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant1$，

则不等式的解集是 $\left\{x\middle|x\leqslant\frac{1}{2}或x\geqslant1\right\}$．

24．解：因为 $p\vee q$ 为假命题，所以 p 是假命题，q 也是假命题．

（1）p 是假命题，则方程 $ax^2+(a+2)x-\frac{1}{4}=0$ 有解，

①$a=0$ 时，原方程为 $2x-\frac{1}{4}=0$，解得　$x=\frac{1}{8}$，符合题意；

②$a\neq0$ 时，原方程是一元二次方程，则

$\begin{cases}a\neq0\\\Delta\geqslant0\end{cases}$，即 $\begin{cases}a\neq0\\(a+2)^2-4a\times\left(-\frac{1}{4}\right)\geqslant0\end{cases}$，

解得　$a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-4$ 且 $a\neq0$．

（2）q 是假命题，则由题意得

$\Delta\geqslant0$，即$(-8)^2-4\times2a\geqslant0$，解得　$a\leqslant8$．

综上所述 a 的取值范围是$\{a|\ a\leqslant-4$ 或$-1\leqslant a\leqslant8\}$．

25．解：设每件衬衫降价 x 元，由题意得

$(40-x)(20+2x)\geqslant1200$

$800+80x-20x-2x^2-1200\geqslant0$

$x^2-30x+200\leqslant 0$

$(x-10)(x-20)\leqslant 0$

$10\leqslant x\leqslant 20$

所以商场每天至少赢利 1200 元时，每件衬衫降价的范围为$\{x|10\leqslant x\leqslant 20，x\in \mathbf{Z}\}$.

习 题 三

1．选择题

（1）C （2）B （3）D （4）D （5）A （6）B （7）A （8）C （9）B

（10）D （11）B （12）A （13）B （14）A （15）D （16）B （17）B （18）B

（19）C （20）C

2．填空题

（1）2 （2）$\dfrac{1}{100}$ （3）-3 （4）$\dfrac{4}{3}$

（5）$\dfrac{a^2b^3}{c}$ （6）$[-1，7]$ （7）$a<-1$ （8）-1

（9）23 （10）$f(x)=2x-x^2$ （11）-12 （12）$\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}$

3．解：（1）由已知得 $2a=6$ 且 $b-2=0$，解得 $a=3$ 且 $b=2$.

（2）因为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}>2^{-2x}$ 可化为 $2^{-f(x)}>2^{-2x}$，所以$-f(x)>-2x$，即 $f(x)<2x$.

由（1）$a=3$ 且 $b=2$ 得 $f(x)=3x^2-5$，故 $3x^2-5<2x$，解得 $-1<x<\dfrac{5}{3}$，所以原不等式的解集为$\left\{x\middle|-1<x<\dfrac{5}{3}\right\}$.

4．解：（1）因为函数 $f(x)=x^3+mx$ 的图像过点（1，5），故 $5=1+m$，解得 $m=4$.

（2）$f(x)$为奇函数. 证明如下：

由（1）知 $m=4$，所以 $f(x)=x^3+4x$，

因为 $f(x)$的定义域 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，

又 $f(-x)=(-x)^3+4(-x)=-(x^3+4x)=-f(x)$，

所以 $f(x)$为奇函数.

5．解：设 A 点坐标为$(x_1，0)$，B 点坐标为$(x_2，0)$，

因为 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{25m^2+24}$，图像与 y 轴交点为 $C(0，-6)$，

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{25m^2+24}\times 6=3\sqrt{25m^2+24}$，

所以当 $m=0$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最小值 $6\sqrt{6}$.

6．解：（1）由题意得$\begin{cases} c=5 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \\ a-b+c=2(a+b+c) \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=5 \end{cases}$，所以$f(x)=x^2-2x+5$．

（2）当$f(x)\leqslant 13$时，即$x^2-2x+5\leqslant 13$，解得　$x\in[-2，4]$．

7．解：（1）由函数$f(x)$在区间$(-\infty，0)$上单调递减可知，函数的对称轴$-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{m-1}{2}\geqslant 0$，解得　$m\leqslant 1$．故m的取值范围为$(-\infty，1]$．

（2）若$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)>0$，则$\varDelta=(m-1)^2-4\times4<0$，解得　$-3<m<5$，故m的取值范围为$(-3，5)$．

8．解：（1）经过x年后，该城市人口总数为$200\times(1+1\%)^x$(万人)，即200×1.01^x（万人），所以$y=200\times1.01^x$，$x\in(0，+\infty)$，且$x\in\mathbf{N}$.

（2）由题意得$200\times1.01^x=210$，即$1.01^x=1.05$，

两边取常用对数得　$x\lg 1.01=\lg 1.05$

$x\approx4.90$，因为$x\in\mathbf{N}$，

所以大约5年以后，该城市人口将达到210万人．

9．解：（1）因为二次函数的顶点坐标为(6，5)，所以设$y=a(x-6)^2+5$，

由$A(0，2)$在抛物线上，解得　$a=-\dfrac{1}{12}$.

则$y=-\dfrac{1}{12}(x-6)^2+5$, 即$y=-\dfrac{1}{12}x^2+x+2$.

（2）当$y=0$时，$-\dfrac{1}{12}x^2+x+2=0$,

$x=6+2\sqrt{15}, x=6-2\sqrt{15}$（不合题意，舍去），

$x=6+2\sqrt{15}\approx 13.75$（m）.

答：该同学把铅球抛出13.75 m.

测 试 题 三

一、选择题

1．D　2．B　3．B　4．C　5．B　6．B　7．D　8．C　9．A

10．A　11．B　12．C　13．B　14．D　15．B　16．D　17．A　18．D

19．B　20．D

二、填空题

21．−7或3　22．4　23．1　24．2

三、解答题

25．解：由题意知　$x^2+ax-a>0$对任意实数x恒成立，

故$\varDelta=a^2+4a<0$，解得　$-4<a<0$，

所以 a 的取值范围是$(-4,0)$.

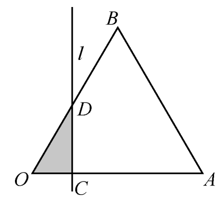
26．解：（1）要使函数 $f(x)=\log_2(3+x)-\log_2(3-x)$有意义，须有$\begin{cases}3+x>0\\3-x>0\end{cases}$，

解得$-3<x<3$，所以函数的定义域为（-3，3）.

因为$f(x)$的定义域（-3，3）关于原点对称，

又 $f(-x)=\log_2(3-x)-\log_2(3+x)=-f(x)$，所以函数为奇函数.

（2）$f(t)=\log_2(3+t)-\log_2(3-t)=\log_2\dfrac{3+t}{3-t}=1$，$\dfrac{3+t}{3-t}=2$，解得 $t=1$.



答图 1

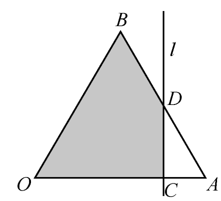
27．解：（1）如答图 1 所示，当 $0<x\leqslant1$ 时，设直线 l 与 OA、OB 分别相交于点 C、D，阴影部分为$\triangle OCD$，

由已知得 $OC=x$，故 $CD=\sqrt{3}x$，故 $y=S_{\triangle OCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$.

（2）如答图 2 所示，当 $1<x\leqslant2$ 时，设直线 l 与 OA、AB 分别相交于点 C、D，阴影部分为四边形 $OCDB$，

由已知得 $OC=x$，故 $AC=2-x$，$CD=\sqrt{3}(2-x)$，$S_{\triangle ACD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-x)^2$，故 $y=S_{\triangle OAB}-S_{\triangle ACD}=$

$\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-x)^2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2+\sqrt{3}$.



答图 2

综上所述，$y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2,\ (0<x\leqslant1)\\-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2+\sqrt{3},\ (1<x\leqslant2)\end{cases}$.

28．解：（1）依题意设 $y=kx+b$，则有$\begin{cases}360=20k+b\\210=25k+b\end{cases}$，$\begin{cases}k=-30\\b=960\end{cases}$，

所以 $y=-30x+960\quad(16\leqslant x\leqslant32，x\in\mathbf{Z})$.

（2）每月获得利润 $P=(-30x+960)(x-16)=-30(x-24)^2+1920$.

所以当 $x=24$ 时，P 有最大值，最大值为 1920.

所以当售价为 24 元时，才能使每月获得最大利润，最大利润为 1920 元.

习　题　四

1．选择题

（1）C　（2）B　（3）A　（4）B　（5）D　（6）D　（7）D　（8）D

（9）A　（10）B　（11）D　（12）A　（13）C　（14）D　（15）A

2．填空题

（1）$a_n=\dfrac{n+1}{n}$　（2）$\dfrac{15}{16}$　（3）3　（4）±1　（5）10^6

（6）$\dfrac{13}{16}$　（7）$\dfrac{1}{4}$　（8）$\dfrac{7}{5}$　（9）$\dfrac{1}{81}$　（10）9

3．解：（1）由题意得 $\begin{cases} a_1+2d=-3 \\ a_1+4d+a_1+9d=30 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=-11 \\ d=4 \end{cases}$，

$a_n=-11+(n-1)4=4n-15$．

（2）由题意得 $-11n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 4=540$，解得 $n=20$ 或 $-\dfrac{27}{2}$（舍去），故 $n=20$．

4．解：由 $x^2+3x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=-3$，因为 $d\neq 0$，所以 $d=-3$；

由 $S_6=a_6+10$ 得 $6a_1+\dfrac{6\times 5\times(-3)}{2}=a_1+5\times(-3)+10$，解得 $a_1=8$．

所以 $S_{10}=10\times 8+\dfrac{10\times 9\times(-3)}{2}=-55$.

5．（1）解：$n=1$ 时，$a_1=S_1=2\times 1^2-3\times 1=-1$；

$n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-3n)-[2(n-1)^2-3(n-1)]=4n-5$，

此时 $a_1=-1$ 亦满足 $a_n=4n-5$，

综上所述，$a_n=4n-5$．

（2）证明：$n\geqslant 2$ 时，$a_n-a_{n-1}=(4n-5)-[4(n-1)-5]=4$，故数列$\{a_n\}$是等差数列.

6．解：（1）因为 $y=f(x)$是一次函数，故设 $f(x)=kx+b$，$(k\neq 0)$.

由 $f(0)=1=k\times 0+b$ 得 $b=1$，所以 $f(1)=k+1$，$f(4)=4k+1$，$f(13)=13k+1$．

又因 $f(1)$，$f(4)$，$f(13)$成等比数列，所以$(4k+1)^2=(k+1)(13k+1)$，

即 $16k^2+1+8k=13k^2+14k+1$，解得 $k=0$（舍去），$k=2$．

所以 $f(x)=2x+1$．

（2）$f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)=(2\times 2+1)+(2\times 4+1)+\cdots+(2\times 2n+1)$

$=2\times(2+4+\cdots+2n)+n$

$=2\times\dfrac{n(2+2n)}{2}+n=2n^2+3n$

7．解：因为等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=2$ 且 $a_2+a_4=\dfrac{20}{3}$，

故有 $\dfrac{2}{q}+2q=\dfrac{20}{3}$，解得 $q=\dfrac{1}{3}$ 或 $q=3$.

当 $q=\dfrac{1}{3}$ 时，$a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=2\times 9=18$，$a_n=a_1q^{n-1}=18\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$；

当 $q=3$ 时，$a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=\dfrac{2}{9}$，$a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{2}{9}\times 3^{n-1}$.

8．解：设所求的三个数为 $x-d$，x，$x+d$，则

$\begin{cases} (x-d)+x+(x+d)=15 \\ (x-d)^2+x^2+(x+d)^2=93 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=5 \\ d=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=5 \\ d=-3 \end{cases}$，

所以所求的三个数是“2，5，8”或“8，5，2”.

9．（1）解：由题意得 $2(a_4q+1)=a_4+2$，解得 $q=\dfrac{1}{2}$，

因为 $a_6=a_1q^5=a_1\left(\frac{1}{2}\right)^5=2$，所以 $a_1=64$，从而 $a_n=64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

（2）证明：由等比数列前 n 项和公式得 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{64\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=128\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$，

因为 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$，所以 $0<1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$，所以 $S_n=128\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<128$.

10．解：（1）由 $a_3\cdot a_4=27a_2$ 得 $a_1q^2\cdot a_1q^3=27a_1q$，由题意知 $q\neq1$，所以 $a_5=a_1q^4=27$.

（2）因为 $b_1=\log_3 a_1=-1$，所以 $a_1=3^{-1}=\frac{1}{3}$.

因为 $a_5=a_1q^4=\frac{1}{3}q^4=27$，又因为 $\{a_n\}$ 各项均为正数，所以 $q>0$，所以 $q=3$.

则等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{3}\times3^{n-1}=3^{n-2}$.

因为 $b_n=\log_3 a_n=\log_3 3^{n-2}=n-2$，

所以 $\{b_n\}$ 为等差数列，其中首项 $b_1=-1$，公差 $d=1$，

则 $S_{20}=-1\times20+\frac{20\times(20-1)\times1}{2}=170$.

11．解：依题意，甲每年的月薪构成等差数列 $\{a_n\}$，首项 $a_1=2000$，公差 $d=400$，

所以，第 n 年甲的月薪为 $a_n=a_1+(n-1)d=2000+(n-1)\times400=400n+1600$（元）.

当 $n=10$ 时，$a_{10}=400\times10+1600=5600$（元）.

甲 10 年的总收入为：

$S_{甲}=12\times\frac{10\times(2000+5600)}{2}=456\,000$（元）.

乙每年的月薪构成等比数列 $\{b_n\}$，其中首项 $b_1=2000$，公比 $q=1+15\%=1.15$，

所以，第 n 年乙的月薪为 $b_n=b_1\times q^{n-1}=2000\times1.15^{n-1}$（元）.

当 $n=10$ 时，$b_{10}=2000\times1.15^9\approx7036$（元）.

乙 10 年的总收入为：

$S_{乙}=12\times2000\times\frac{1-1.15^{10}}{1-1.15}\approx487\,289$（元）.

答：第十年甲和乙的月薪分别是 5600 元和 7036 元；

甲和乙 10 年的总收入分别为 456 000 元和 487 289 元.

测 试 题 四

一、选择题

1．B　2．B　3．C　4．B　5．B　6．B　7．D　8．D　9．A

10．B　11．C　12．B　13．D　14．C　15．B　16．D　17．C　18．C

19．B　20．B

二、填空题

21．10 000　22．3　23．−1　24．$\frac{1}{2}$　25．4

三、解答题

26．解：由 $S_9=S_{17}$ 得　$9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=17a_1+\frac{17\times 16}{2}d$，即

$$9\times 25+\frac{9\times 8}{2}d=17\times 25+\frac{17\times 16}{2}d,$$

解得　$d=-2$，

因为 $S_n=25n+\frac{n\times(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+26n=-(n-13)^2+169$，

所以当 $n=13$ 时，S_n 最大，即数列前 13 项的和最大，最大值为 169.

27．解：(1) 由①$f(x-4)=f(-x)$知次函数对称轴为 $x=-2$，

由②知顶点在直线 $y=2x-8$ 上，则 $x=-2$ 时，$y=-12$，

所以二次函数顶点为（−2，−12），

设二次函数为 $f(x)=a(x+2)^2-12$，又过点（2，4），可得　$a=1$，故 $f(x)=x^2+4x-8$.

(2) 因为 $S_n=f(n)=n^2+4n-8$

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-3$，

当 $n>1$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+4n-8)-[(n-1)^2+4(n-1)-8]=2n+3$，

所以 $a_n=\begin{cases}-3, & n=1\\ 2n+3, & n>1\end{cases}$.

28．解：(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d．因为 $a_3=-6$，$a_6=0$，

所以$\begin{cases}a_1+2d=-6\\ a_1+5d=0\end{cases}$，解得　$a_1=-10$，$d=2$．故 $a_n=-10+2(n-1)=2n-12$．

(2) 设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q．因为 $b_2=a_1+a_2+a_3=-10-8-6=-24$，$b_1=-8$，

所以 $q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{-24}{-8}=3$．故$\{b_n\}$的前 n 项和公式为 $S_n=\frac{-8\times(1-3^n)}{1-3}=4\times(1-3^n)$．

29．解：(1) 2018 年底该城镇的住房面积为$[800(1+10\%)-x]$万平方米.

(2) 由题意得　$800\times1.1^{10}-1.1^9x-1.1^8x-\cdots-x=800\times2$，

即　$800\times1.1^{10}-x(1.1^9+1.1^8+\cdots+1)=800\times2$，

解得　$x\approx29.80$，

所以每年要拆除的旧住房面积约为 29.80 万平方米.

习　题　五

1．选择题

(1) D　(2) C　(3) A　(4) C　(5) B　(6) C　(7) A　(8) D　(9) C

（10）D　（11）A　（12）C　（13）A　（14）C　（15）D　（16）D　（17）B　（18）B

（19）A　（20）C　（21）A　（22）B　（23）A　（24）B　（25）A

2．填空题

（1）$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$　　（2）$\overrightarrow{AC}$　　（3）$\frac{32}{7}$　　（4）-5　　（5）-1

（6）$\sqrt{5}$　　（7）$(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$或$(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$　　（8）1

（9）（0，3）或（0，−3）　　（10）$\sqrt{2}$

3．（1）$M\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$　（2）$P\left(-1, \frac{5}{3}\right)$；$Q\left(0, \frac{7}{3}\right)$.

4．$C(7，-2)$；$D(5，1)$.

5．解：（1）$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{BC}|\cos\langle\overrightarrow{DE}，\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\cos 0°=\frac{1}{2}a^2$.

（2）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AB}，\overrightarrow{AC}\rangle=a\cdot a\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}a^2$.

（3）因为三角形 ABC 为正三角形，E 为中点，$\langle\overrightarrow{EB}，\overrightarrow{EC}\rangle=90°$，所以$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=0$.

6．提示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$；$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$；$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$；$\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle=45°$.

7．解：（1）因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2=2^2-2\times|\boldsymbol{b}|\times\cos 60°-6|\boldsymbol{b}|^2=-3$，

整理得　$6|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{b}|-7=0$.

解得　$|\boldsymbol{b}|=1$ 或$|\boldsymbol{b}|=-\frac{7}{6}$（舍去）.

（2）因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=2^2+2\times2\times1\times\cos 60°+1^2=7$，

所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.

8．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

测 试 题 五

一、选择题

1．B　2．D　3．D　4．C　5．B　6．B　7．A　8．B　9．D　10．A

11．C　12．C　13．B　14．C　15．A　16．B　17．B　18．B　19．D　20．A

二、填空题

21．$(-2，-1)$　22．4　23．-6　24．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　25．25

三、解答题

26．解：因为　$\boldsymbol{a}=(2，-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1，3)$，$\boldsymbol{c}=(7，-11)$且 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}-y\boldsymbol{b}$，

所以 $(7,-11)=x(2,-1)-y(-1,3)=(2x+y,-x-3y)$，得 $\begin{cases}2x+y=7\\x+3y=11\end{cases}$，

解得 $x=2$，$y=3$.

27．当 $t=-2$ 时，$|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的最小值为$\sqrt{5}$．

28．解：$\boldsymbol{a}=(3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(2,-x)$，

因为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$\frac{2}{3}=-\frac{x}{4}$，即 $x=-\frac{8}{3}$，

因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}=(2,y)$，所以 $3\times2-4y=0$，即 $y=\frac{3}{2}$，

所以 $\boldsymbol{b}=\left(2,-\frac{8}{3}\right)$，$\boldsymbol{c}=\left(2,\frac{3}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2\times2+\left(-\frac{8}{3}\right)\times\frac{3}{2}=0$，

所以向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的夹角是 90°．

29．解：（1）$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2$

$=4\times4^2-4\times4\times3\cos 60^\circ-3\times3^2=13$．

（2）$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(a+2b)\cdot(a+2b)}=\sqrt{a^2+4a\cdot b+4b^2}=\sqrt{4^2+4\times4\times3\cos 60^\circ+4\times3^2}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$．

30．设 B 点坐标为（x，y），则 $\overrightarrow{AB}=(x+2,y-1)$，

由题意得 $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=(3\sqrt{5})^2\\\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=1\\y=-5\end{cases}$或$\begin{cases}x=-5\\y=7\end{cases}$

所以点 B 的坐标是（1，−5）或（−5，7）．

习 题 六

1．选择题

（1）C （2）D （3）B （4）C （5）D （6）B （7）C （8）C
（9）C （10）D （11）A （12）D （13）C （14）C （15）D （16）A
（17）C （18）A （19）D （20）B （21）D （22）C （23）D （24）A
（25）B （26）A （27）D （28）C （29）D （30）B

2．填空题

（1）$\frac{\pi}{3}$ （2）$\sqrt{3}$ （3）$\frac{1}{4}$ （4）$-\frac{5}{3}$ （5）−4

（6）$\frac{3\pi}{4}$ （7）$[-5,5]$ π （8）3 或−3 （9）5 （10）45°

（11）45°　　　　（12）3　　　　（13）$\sqrt{3}$　　　　（14）$\sqrt{2}$

3．解：（1）因为在△ABC 中，$\cos A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为角 A、角 B 为三角形内角，所以 $0°<A+B<180°$，故 $A+B=135°$，即 $C=45°$.

（2）因为 $AB=\sqrt{2}$，即 $c=\sqrt{2}$，又因为 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$，所以 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. 所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\times\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=\dfrac{6}{5}$.

4．（1）$-\dfrac{12}{5}$　　（2）$-\dfrac{4}{3}$

5．解：（1）因为 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

又函数 $f(x)$的最小正周期为 π，

所以 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得　$\omega=1$.

（2）由（1）可知，函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以当 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ 时，函数 $f(x)$有最大值为 $\sqrt{2}$，

此时 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数取得最大值时 x 的集合为 $\left\{x\middle|x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（3）因为 $y=\sin x$ 的增区间是 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得

$-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数的单调递增区间为 $\left[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\ \dfrac{\pi}{8}+k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

6．解：（1）因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)-(-\cos\beta,\sin\beta)$

$=(\cos\alpha+\cos\beta,\sin\alpha-\sin\beta)$.

所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

两边平方得 $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=\dfrac{9}{5}$,

整理得 $2+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{9}{5}$,

化简得 $2\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{5}$,

因此 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{10}$.

（2）因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\pi$.

因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{10}$,

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{11}}{10}$.

因为 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$,

所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$.

因此 $\sin a=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$$

$$=\frac{3\sqrt{11}}{10}\times\frac{5}{13}-\left(-\frac{1}{10}\right)\times\frac{12}{13}=\frac{15\sqrt{11}+12}{130}.$$

7．解：$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\sin x，-3\cos x)+(-\cos x，\sin x)=(\sin x-\cos x，-3\cos x+\sin x)$，

$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\sin x(\sin x-\cos x)+(-\cos x)(-3\cos x+\sin x)$

$=\sin^2x-\sin x\cos x+3\cos^2x-\sin x\cos x=1+2\cos^2x-2\sin x\cos x$

$=1+1+\cos 2x-\sin 2x=2-(\sin 2x-\cos 2x)=2-\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

函数 $f(x)$ 的最大值是 $2+\sqrt{2}$，最小正周期是 π.

8．解：（1）$y=\cos 2x-2\cos x=2\cos^2x-2\cos x-1=2\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$，当 $\cos x=-1$ 时，$y_{最大}=3$，当 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 时，$y_{最小}=-\dfrac{3}{2}$.

（2）由（1）可知，当 $\cos x=-1$ 时，y 取最大值，在 $[0，\pi]$ 内使 $\cos x=-1$ 的角只有 π；当 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 时，y 取最小值，在 $[0，\pi]$ 内使 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 的角只有 $\dfrac{\pi}{3}$.

所以在 $[0,\pi]$ 内，当 y 取最大值时 $x=\pi$，当 y 取最小值时 $x=\dfrac{\pi}{3}$．

9．解：（1）因为 $\cos B=\dfrac{4}{5}$，$0<\angle B<\pi$，所以 $\sin B=\dfrac{3}{5}$，

又因为 $\angle C=\dfrac{\pi}{4}$，由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$ 得　$AB=\dfrac{AC\sin C}{\sin B}=\dfrac{6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{3}{5}}=5\sqrt{2}$．

（2）因为 $\cos A=\cos[\pi-(B+C)]=-\cos(B+C)=-(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$

$=-\left(\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，

所以 $\sin A=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A=\dfrac{7\sqrt{2}-\sqrt{6}}{20}$．

10．解：（1）由 $2\sin(A+B)-\sqrt{3}=0$ 得　$\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin C=\sin[180^\circ-(A+B)]=\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $C=120^\circ$（不合题意，舍去）或 $C=60^\circ$，所以 $C=60^\circ$．

（2）因为 a，b 是方程 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$ 的两个根，

所以 $a+b=2\sqrt{3}$，$ab=2$．由余弦定理得

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ=(a+b)^2-3ab=(2\sqrt{3})^2-3\times2=6$，所以 $c=\sqrt{6}$．

（3）$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

11．提示：（1）由题意得　$OA=25\times2=50$（n mile），$OB=15\times2=30$（n mile），

$\angle AOB=90^\circ+30^\circ=120^\circ$．由余弦定理得　$AB=70$（n mile）．

即甲、乙两船的距离 AB 是 70 n mile．

（2）由正弦定理得　$\sin\angle OAB=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，因为在 $\triangle OAB$ 中，$\angle AOB=120^\circ$，所以 $\angle OAB$ 是锐角，利用计算器求得 $\angle OAB\approx21.79^\circ$，$90^\circ-21.79^\circ=68.21^\circ$．即乙船位于甲船北偏西 68.21° 的方向上．

12．解：在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BDC=120^\circ$，$\angle CBD=15^\circ$．

由正弦定理得　$\dfrac{BD}{\sin 45^\circ}=\dfrac{CD}{\sin 15^\circ}$，

而 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，因此 $BD=\dfrac{60\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}=60(\sqrt{3}+1)$．

在 $\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2-2\,AD\cdot BD\cos 60^\circ=21\,600$，

因此 $AB=60\sqrt{6}$ m，即 AB 的长是 $60\sqrt{6}$ m.

测 试 题 六

一、选择题

1．C　2．B　3．C　4．C　5．A　6．A　7．C　8．A　9．C
10．A　11．D　12．A　13．B　14．D　15．D　16．D　17．A　18．C
19．C　20．C

二、填空题

21．$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　22．$-\frac{4\sqrt{5}}{9}$　23．$\frac{1}{2}$　24．$\frac{1}{3}$　25．45°

三、解答题

26．解：由 $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ 得 $\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan x\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$，解得 $\tan x=3$.

解方程组 $\begin{cases}\frac{\sin x}{\cos x}=3\\ \sin^2 x+\cos^2 x=1\end{cases}$ 得 $\cos^2 x=\frac{1}{10}$.

所以 $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\frac{1}{10}-1=-\frac{4}{5}$.

27．解：由 $P(4,3)$为角 α 终边上一点，知 $x=4$，$y=3$，得 $r=5$，

所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$，

所以
$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{25}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{24}{25}=\frac{7-24\sqrt{3}}{50}.$$

28．解：（1）
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sin x\cos x-2\sin^2 x=\sin 2x-2\sin^2 x=\sin 2x+\cos 2x-1$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1,$$

则 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1+m$，因为$f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$，所以 $m=1$.

（2）由（1）知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，又因为 $f(x)=1$，所以 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，($k\in\mathbf{Z}$)，

又因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，解得 $x=\frac{\pi}{4}$.

29．解：(1) 根据余弦定理，有 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $0<\angle B<\pi$，所以 $\angle B=\frac{\pi}{4}$.

(2) 因为 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，

所以 $\angle A+\angle C=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，$\angle C=\frac{3\pi}{4}-\angle A$，

$\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$

$=\sqrt{2}\cos A-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$

因为 $0<\angle A<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}<\angle A+\frac{\pi}{4}<\pi$，

所以当且仅当 $\angle A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，即 $\angle A=\frac{\pi}{4}$ 时，原式有最大值为 1.

30．解：$y=\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin 2x=\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sin 2x=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

(1) $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以该函数的最小正周期是 π.

(2) 该函数的最大值为 2（写成 $y_{\max}=2$ 亦可）．此时 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$．所以函数取得最大值时 x 的取值集合是 $\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{12},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

(3) 因为 $y=\sin x$ 的减区间是 $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, $(k\in\mathbf{Z})$.

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得

$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

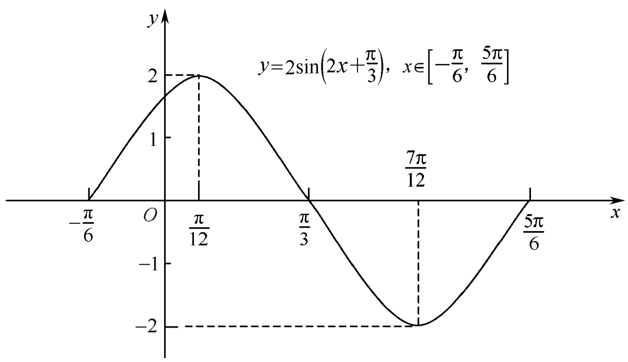
所以该函数的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）.

（4）列表见答表 1.

答表 1

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	2	0	−2	0

描点、作图，得到函数在$\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$一个周期上的图像，如答图 3 所示.



答图 3

习　题　七

1．选择题

（1）A　（2）C　（3）C　（4）B　（5）B　（6）B　（7）A　（8）C　（9）C

（10）D　（11）A　（12）B　（13）A　（14）B　（15）D　（16）D　（17）A　（18）A

（19）A　（20）C

2．填空题

（1）$4x-3y-7=0$　（2）（2，2）　（3）$3x+y-10=0$　（4）$0\leqslant a\leqslant 10$

（5）$3x+2y-4=0$　（6）$(x+4)^2+y^2=1$　（7）$x=2$ 或 $3x-4y+10=0$

（8）-12.5　（9）-8　（10）$3+\frac{\sqrt{5}}{5}$　（11）$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$

（12）第二或第四象限　（13）$y^2=\pm 8x$　（14）3　（15）$\sqrt{2}$

（16）5　（17）$x^2=-8y$　（18）$\frac{3}{16}$　（19）$4x-3y-17=0$

（20）6

3．解：（1）设 $M'(m, n)$，则 l 是线段 MM' 的中垂线，

设直线 MM' 的方程为 $x+y-D=0$，点 $M(1,1)$在直线 MM' 上，可得 $D=2$，

所以直线 MM' 的方程为 $x+y-2=0$，

由 $\begin{cases} x-y-2=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$，即点$(2,0)$是线段 MM' 的中点，

根据中点公式，有 $2=\dfrac{1+m}{2}$，$0=\dfrac{1+n}{2}$，解得 $m=3$，$n=-1$.

所以点 M 关于直线 l 的对称点为 $M'(3,-1)$.

（2）设直线 l 关于点 M 对称的直线 l'：$x-y-a=0$，

则 M 到 l' 的距离与到 l 的距离相等，有 $\dfrac{|1-1-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$，

即 $|a|=2$，所以 $a=-2$ 或 $a=2$（此时 l' 与 l 重合，舍去）.

所以，直线 l 关于点 M 对称的直线 l' 的方程为 $x-y+2=0$.

4.（1）$(x-2)^2+y^2=8$　（2）$m=1$

5．解：(1) 因为直线斜率为 1 且过椭圆 C 的右焦点 $(\sqrt{2},0)$，所以直线方程为 $y=x-\sqrt{2}$.

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解方程组 $\begin{cases} y=x-\sqrt{2} \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，消去 y 整理得 $(a^2+b^2)x^2-2\sqrt{2}a^2x+2a^2-a^2b^2=0$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{2\sqrt{2}a^2}{a^2+b^2}$，$y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{2}a^2}{a^2+b^2}-2\sqrt{2}=-\dfrac{2\sqrt{2}b^2}{a^2+b^2}$，

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)=\left(\dfrac{2\sqrt{2}a^2}{a^2+b^2},-\dfrac{2\sqrt{2}b^2}{a^2+b^2}\right)$，

又 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 共线，所以 $\dfrac{2\sqrt{2}a^2}{a^2+b^2}=3\times\dfrac{2\sqrt{2}b^2}{a^2+b^2}$，即 $a^2=3b^2$.

又因为 $c=\sqrt{2}$，所以 $a^2-b^2=3b^2-b^2=2$，解得 $b^2=1$，$a^2=3$.

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

6．解：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由题意得 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

②式减①式得 $\dfrac{x_2^2-x_1^2}{4}+(y_2^2-y_1^2)=0$，

$\dfrac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{4}+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0$，

因为$P\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$是$MN$的中点，所以$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=1$，所以$\dfrac{2(x_2-x_1)}{4}+(y_2-y_1)=0$，所以$k_{MN}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{1}{2}$，即直线$MN$的斜率$k=-\dfrac{1}{2}$，

所求直线的方程为：$y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即$x+2y-2=0$.

联立方程组$\begin{cases}x+2y-2=0\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，整理得 $y^2-y=0$，

则$\Delta=(-1)^2-4\times1\times0=1$，$\Delta>0$，符合题意，所以直线的方程是$x+2y-2=0$.

7．解：（1）由题意知$a=\sqrt{2}b$，$a^2=b^2+c^2$，所以$b=c$，

于是$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{\sqrt{2}c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）由（1）知，椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$，即$x^2+2y^2=2c^2$.

设$F_2(c，0)$，$M(c，m)$，将$M(c，m)$代入椭圆方程得 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$，

直线OM的斜率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则PQ的斜率为$-\sqrt{2}$，

直线PQ的方程为$y=-\sqrt{2}(x-c)$，

解方程组$\begin{cases}y=-\sqrt{2}(x-c)\\ x^2+2y^2=2c^2\end{cases}$

消去x，整理得 $5y^2-2\sqrt{2}cy-2c^2=0$，

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，由韦达定理得

$y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}c$，$y_1y_2=-\dfrac{2}{5}c^2$，

由$S_{\triangle PF_1Q}=S_{\triangle PF_1F_2}+S_{\triangle QF_1F_2}=c|y_1-y_2|=c\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$，

于是，$4\sqrt{3}=c\sqrt{\dfrac{8}{25}c^2+\dfrac{8}{5}c^2}$，

得$c^2=5$，则$a^2=10$，$b^2=5$，所以椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

8．$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{8}=1$.

9．解：（1）由$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ a=\sqrt{2}\end{cases}$，可得 $c=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，于是$b^2=a^2-c^2=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以椭圆的标准方程为$\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}=1$.

（2）将椭圆方程变形为$4x^2+y^2=2$，设直线l的方程为$y=x+m$，

设l与椭圆的交点$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

由方程组$\begin{cases} y=x+m \\ 4x^2+y^2=2 \end{cases}$，消去$y$得　$5x^2+2mx+m^2-2=0$.

因为$x_1+x_2=-\dfrac{2m}{5}$，$x_1x_2=\dfrac{m^2-2}{5}$，

所以$y_1y_2=(x_1+m)(x_2+m)=x_1x_2+m(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-2}{5}+m\left(-\dfrac{2m}{5}\right)+m^2=\dfrac{4m^2-2}{5}$.

因为$OA\perp OB$，所以$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，而$\overrightarrow{OA}=(x_1，y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2，y_2)$，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{m^2-2}{5}+\dfrac{4m^2-2}{5}=0$．解得　$m=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

又因为$\Delta=(2m)^2-4\times5\times(m^2-2)=\dfrac{136}{5}$，故$\Delta>0$，

∴所求直线方程为$y=x+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$或$y=x-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

10．解：（1）由已知条件，设抛物线的方程为$y^2=2px$，因为点Q到焦点F的距离是1，且到y轴的距离是$\dfrac{3}{8}$，所以$\dfrac{p}{2}+\dfrac{3}{8}=1$，解得　$p=\dfrac{5}{4}$，所以抛物线的方程为$y^2=\dfrac{5}{2}x$.

（2）假设直线l的斜率不存在，则直线方程为$x=3$与抛物线$y^2=\dfrac{5}{2}x$联立，可解得交点A，B的坐标分别为$\left(3,\ \dfrac{\sqrt{30}}{2}\right)$，$\left(3,\ -\dfrac{\sqrt{30}}{2}\right)$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{2}\neq0$，可知直线$OA$与$OB$不垂直，不满足题意，所以假设不成立，直线的斜率存在.

设直线的斜率为k，由题意知$k\neq0$，则直线的方程为$y-1=k(x-3)$，即$kx-y+1-3k=0$，

设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则A，B满足$\begin{cases} kx-y+1-3k=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ y^2=\dfrac{5}{2}x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$

把②变为$x=\dfrac{2}{5}y^2$后，代入①整理得　$2ky^2-5y+5-15k=0$

所以$y_1y_2=\dfrac{-15k+5}{2k}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{25}(y_1y_2)^2=\dfrac{(1-3k)^2}{k^2}$.

因为$OA\perp OB$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$x_1x_2+y_1y_2=0$，

$\frac{(1-3k)^2}{k^2}+\frac{-15k+5}{2k}=0$，解得 $k=\frac{1}{3}$ 或 $k=2$.

当 $k=\frac{1}{3}$ 时，直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{3}x$，不满足 $OA\perp OB$，舍去.

当 $k=2$ 时，$\Delta=5^2-4\times4\times(-25)=425>0$.

所以直线 l 的方程为 $2x-y-5=0$.

11．解：（1）$|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$成等差数列，所以$|AF_2|+|BF_2|=2|AB|$.

又$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a=4$，所以 $3|AB|=4$，$|AB|=\frac{4}{3}$.

（2）因为 $c=\sqrt{1-b^2}$，所以 $F_1(-\sqrt{1-b^2}, 0)$，又因为直线 l 的斜率为 1，所以直线 l 的方程为 $y=x+\sqrt{1-b^2}$.

解方程组 $\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=x+\sqrt{1-b^2}\end{cases}$，消去 y 整理得 $(b^2+1)x^2+2\sqrt{1-b^2}\,x+1-2b^2=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{1-b^2}}{b^2+1}$，$x_1x_2=\frac{1-2b^2}{b^2+1}$，所以$|AB|=\sqrt{(1+1)\left[\left(\frac{-2\sqrt{1-b^2}}{b^2+1}\right)^2-4\times\frac{1-2b^2}{b^2+1}\right]}=\frac{4}{3}$，

解得 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$，或 $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去），故 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12．解：（1）由已知得 $b=\sqrt{3}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{c}{\sqrt{c^2+3}}=\frac{1}{2}$，解得 $c=1$，$a=\sqrt{c^2+3}=2$.

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

解方程组 $\begin{cases}y=2x+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 y 整理得 $19x^2+16mx+4m^2-12=0$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{16m}{19}$，$y_1+y_2=2x_1+m+2x_2+m=2\left(-\frac{16m}{19}\right)+2m=\frac{6m}{19}$.

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)=\left(-\frac{16m}{19}, \frac{6m}{19}\right)$，

所以 $P\left(-\frac{16m}{19}, \frac{6m}{19}\right)$，代入椭圆的方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，解得 $m^2=\frac{19}{4}$，$m=\pm\frac{\sqrt{19}}{2}$，

此时 $\Delta=(16m)^2-4\times19\times(4m^2-12)=684$，故 $\Delta>0$，

所以直线 l 的方程为 $y=2x+\frac{\sqrt{19}}{2}$ 或 $y=2x-\frac{\sqrt{19}}{2}$.

测 试 题 七

一、选择题

1. A　2. B　3. A　4. B　5. C　6. A　7. B　8. D　9. B　10. B
11. C　12. A　13. C　14. D　15. B　16. A　17. D　18. D　19. C　20. D

二、填空题

21. 2　22. 1　23. $k>1$　24. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$　25. 35

三、解答题

26.（1）$x^2-\frac{y^2}{2}=1$　（2）$m=\pm 1$

27. 解：（1）由 $x^2+y^2-4x+3=0$ 得　$(x-2)^2+y^2=1$，

$\therefore F(2，0)$，$\therefore \frac{p}{2}=2$，$\therefore p=4$，

$\therefore$所求抛物线标准方程为：$y^2=8x$.

（2）$k_l=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$，

$\therefore$直线 l 的方程为 $y=-(x-2)$，即 $x+y-2=0$，

$\therefore \begin{cases} y^2=8x \\ x+y-2=0 \end{cases}$，消去 y 得　$x_2-12x+4=0$，

设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，由韦达定理得　$x_1+x_2=12$，$x_1x_2=4$，

则 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{2\times(144-16)}=\sqrt{256}=16$

28.（1）$m=8$　（2）$P\left(\frac{3}{2},\ \sqrt{6}\right)$，$Q\left(\frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)$　（3）$S_{\triangle PF_1F_2}=\sqrt{6}$

29. 解：（1）因为点 M 到 $(-\sqrt{3},\ 0)$，$(\sqrt{3},\ 0)$ 的距离之和是 4，所以 M 的轨迹 C 是长轴为 4，焦点在 x 轴上焦距为 $2\sqrt{3}$ 的椭圆，其方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）将 $y=kx+\sqrt{2}$，代入曲线方程，整理得 $(1+4k^2)x^2+8\sqrt{2}kx+4=0$ ……①

设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，由方程①得

$$x_1+x_2=-\frac{8\sqrt{2}k}{1+4k^2}，\quad x_1x_2=\frac{4}{1+4k^2}\cdots\cdots②$$

又 $y_1\cdot y_2=(kx_1+\sqrt{2})(kx_2+\sqrt{2})=k^2x_1x_2+\sqrt{2}k(x_1+x_2)+2$ ……③

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

将②③代入上式，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

此时 $\Delta=(8\sqrt{2}k)^2-4\times4\times(1+4k^2)=64k^2-16=80>0$，所以 $k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

30．解：（1）如答图 4 所示，设双曲线的标准方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0，b>0)$，

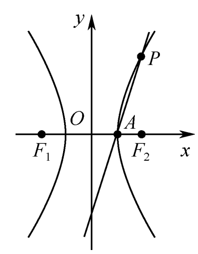
因为点 $P(2，3)$在双曲线上，所以 $\dfrac{2^2}{a^2}-\dfrac{3^2}{b^2}=1$． ……①

由焦点坐标可知，半焦距 $c=2$，

又因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $a^2+b^2=4$，…………………②

联立①②解得 $a^2=1$，$b^2=3$，

所以双曲线的标准方程是 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.



答图 4

（2）因为 $a^2=1$，所以 $a=1$，故双曲线的右顶点 A 的坐标是 $(1，0)$，由此得到直线 AP 的方程是 $y=\dfrac{3-0}{2-1}(x-1)$，即 $y=3x-3$，

因为 $l//AP$，所以可设直线 l 的方程为 $y=3x+n$，

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

联立直线 l 与双曲线的方程得 $\begin{cases}y=3x+n\\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

消去 y，并整理得到 $6x^2+6nx+n^2+3=0$，…… ③

于是 $x_1+x_2=-n$，$y_1+y_2=(3x_1+n)+(3x_2+n)=3(x_1+x_2)+2n=-n$.

因为直线 l 与双曲线有两个交点，

所以$(6n)^2-4\times6\times(n^2+3)>0$，

解得 $n<-\sqrt{6}$ 或 $n>\sqrt{6}$，即 n 的取值范围是 $\{n\mid n<-\sqrt{6}$ 或 $n>\sqrt{6}\}$.

因为 $\overrightarrow{AM}=(x_1-1，y_1)$，$\overrightarrow{AN}=(x_2-1，y_2)$，

所以 $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=(x_1+x_2-2，y_1+y_2)=(-n-2，-n)$，

又因为$|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}|=4$，

所以$\sqrt{(-n-2)^2+(-n)^2}=4$，

整理得　$n^2+2n-6=0$，

解得　$n=\sqrt{7}-1$ 或 $n=-\sqrt{7}-1$.

又因为　$(\sqrt{7}-1)\notin\{n\mid n<-\sqrt{6}$ 或 $n>\sqrt{6}\}$，

$(-\sqrt{7}-1)\in\{n\mid n<-\sqrt{6}$ 或 $n>\sqrt{6}\}$，

所以直线 l 的方程是 $y=3x-\sqrt{7}-1$.

习　题　八

1．选择题

（1）A　（2）C　（3）A　（4）D　（5）C　（6）C　（7）D

（8）C　（9）C　（10）A　（11）B　（12）C　（13）C　（14）C

（15）B　（16）C　（17）A　（18）B　（19）B　（20）C

2．填空题

（1）32π　（2）$\dfrac{9\pi}{16}$　（3）$16\sqrt{5}$　（4）54π　（5）$\subset$　$\in$　$\in$　$\supset$　$\notin$　$\subset$　$\in$

（6）90°　（7）$\sqrt{5}a$　（8）$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

3．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4．证明：（1）因为 $PC\perp$平面 $ABCD$，$DC\subset$平面 $ABCD$，所以 $DC\perp PC$.

又因为 $DC\perp AC$，$PC\cap AC=C$，所以 $DC\perp$平面 PAC.

（2）由（1）可知 $DC\perp$平面 PAC，又因为 $DC//AB$，所以 $AB\perp$平面 PAC.

又因为 $AB\subset$平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$平面 PAC.

（3）在棱 PB 上存在这样的点 F，使得 $PA//$平面 CEF.

取 PB 的中点 F，连接 EF，CE，CF.

在$\triangle PAB$ 中，点 E，F 分别是 AB，PB 的中点，则 $EF//PA$.

因为 $EF\subset$平面 CEF，$PA\not\subset$平面 CEF，所以 $PA//$平面 CEF.

5．解：（1）取 BD 的中点 F，连接 EF，CF，因为 E 是 AB 的中点，

所以 EF 是$\triangle ABD$ 的中位线，则 $EF//AD$，

所以直线 CE 和 AD 夹角就是直线 CE 和 EF 的夹角，

在$\triangle CEF$ 中，$EF=\dfrac{1}{2}$，$CE=CF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\cos\angle CEF=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

所以异面直线 CE 和 AD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

（2）体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

6．证明：过 N 作直线 $NH /\!/ EB$ 交直线 AB 于 H，连接 MH，因为 $\frac{BH}{HA}=\frac{EN}{NA}=\frac{BM}{MD}$，所以 $HM/\!/AD$，又 $AD/\!/BC$，$HM/\!/BC$，又因为 $NH /\!/ EB$，$NH \cap HM=H$，所以平面 $MHN /\!/$ 平面 CBE，又因为 $MN\subset$平面 MHN，所以 $MN /\!/$ 平面 BCE.

7．解：（1）因为 $ABCD$ 为直角梯形，$AB/\!/DC$，$\angle DAB=90°$，

所以 DC 与 PB 所成角是 AB 与 PB 所成角.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$.

所以$\triangle PBA$ 为直角三角形，在 Rt$\triangle PBA$ 中，$PA=\frac{1}{2}$，$AB=1$，所以 $PB=\frac{\sqrt{5}}{2}$；

所以 $\cos\angle PBA=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

（2）证明：因为 $ABCD$ 为直角梯形，且 $AB/\!/DC$，$\angle DAB=90°$，

所以 $CD\perp AD$，又 $PA\perp$平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp CD$，又因为 $PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$平面 PAD.

又因为 $CD\subset$ 平面 PCD，所以平面 $PAD\perp$平面 PCD.

8．（1）提示：$\triangle ABC$ 为直角三角形．P 在$\triangle ABC$ 的投影为其外心，即 BC 的中点.

（2）$\sqrt{11}$ （3）$\frac{5}{6}$

测 试 题 八

一、选择题

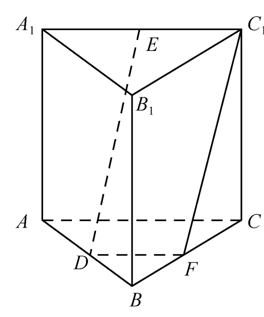
1．A 2．C 3．B 4．C 5．C 6．B 7．A 8．A 9．C 10．C

11．D 12．C 13．B 14．A 15．C 16．D 17．D 18．A 19．B 20．D

二、填空题

21．8 22．$2\sqrt{3}$ 或 $10\sqrt{3}$ 23．$\frac{\pi}{4}$ 24．12π 25．$\sqrt{7}$

三、解答题



答图 5

26．证明：（1）如答图 5 所示，取 BC 中点 F，连接 C_1F，DF，

因为 DF 是$\triangle ABC$ 的中位线，所以 $DF /\!/ AC$，且 $DF=\frac{1}{2}AC$，

因为 $EC_1 /\!/ AC$，且 $EC_1=\frac{1}{2}AC$，所以 $DF /\!/ EC_1$，$DF=EC_1$，

所以四边形 $DFEC_1$ 是平行四边形，故 $DE /\!/ C_1F$，

因为 $DE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$C_1F\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $DE/\!/$ 平面 BCC_1B_1.

（2）因为 $DE/\!/C_1F$，所以 DE 与平面 ABC 所成角就是直线 C_1F 与平面 ABC 所成角，即 $\angle C_1FC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CC_1F$ 中，$FC=\dfrac{1}{2}CC_1$，所以 $\tan\angle C_1FC=\dfrac{CC_1}{CF}=2$，

所以直线 DE 与平面 ABC 所成角的正切值是 2.

27．证明：（1）连接 BD，因为 E，F 分别是 SB，SD 的中点，

所以 $EF/\!/BD$，又 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF/\!/$ 平面 $ABCD$.

（2）因为 $SA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SA\perp CD$.

又 $CD\perp AD$，$SA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面 SAD.

又 $CD\subset$ 平面 SCD，所以平面 $SCD\perp$ 平面 SAD.

28．（1）证明：因为 $AB\perp$ 平面 BCD，$CD\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp CD$，又 $CD\perp BD$，$AB\cap BD=B$，所以 $CD\perp$ 平面 ABD.

（2）因为 $AB\perp$ 平面 BCD，$BD\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp BD$，又因为 $AB=BD=1$，所以 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}$，又因为 M 是 AD 的中点，所以 $S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{4}$，由（1）知 $CD\perp$ 平面 ABD，即 CD 是三棱锥 $C\text{-}ABM$ 的高，所以 $V_{\text{三棱锥}A\text{-}MBC}=V_{\text{三棱锥}C\text{-}ABM}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABM}\times CD=\dfrac{1}{12}$.

29．（1）证明：如答图 6 所示，因为 C 是圆柱底面圆周上异于 A，B 的任意一点，

且 AB 是圆柱底面圆的直径，

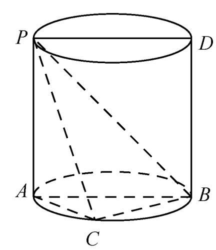
所以 $BC\perp AC$，因为 $AP\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AP\perp BC$，

因为 $AP\cap AC=A$，$AP\subset$ 平面 APC，$AC\subset$ 平面 APC，

所以 $BC\perp$ 平面 APC，$BC\subset$ 平面 PBC.

所以平面 $PBC\perp$ 平面 APC.



答图 6

（2）解：设 $AC=BC=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2}\,x$ （$x>0$），

所以圆柱的底面圆的半径 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，

故 $V_{P\text{-}ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AP=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AC\times BC\times AP=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}x^2AP$，

$V_{\text{柱}}=\pi r^2AP=\dfrac{1}{2}\pi x^2AP$.

所以 $V_{\text{柱}}:V_{P\text{-}ABC}=3\pi$.

30．（1）证明：因为 $PA\perp AB$，$PA\perp BC$，$AB\cap BC=B$，所以 $PA\perp$ 平面 ABC;

又 $BD\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BD$.

（2）因为 $AB\perp BC$，$PA=AB=BC=2$，所以$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

又因为点 D 为线段 AC 的中点，所以 $BD\perp AC$.

因为 $AC\cap PA=A$，所以 $BD\perp$ 平面 PAC，

又因为 $BD\subset$ 平面 BDE，所以平面 $BDE\perp$ 平面 PAC.

（3）当 $PA\parallel$ 平面 BDE 时，因为平面 $BDE\cap$ 平面 $PAC=DE$，$PA\subset$ 平面 PAC，

所以 $PA\parallel DE$.

又因为 D 为线段 AC 的中点，所以 $DE=\dfrac{1}{2}PA=1$，且 $DE\perp$ 平面 ABC.

所以 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2=1$，所以 $V_{E\text{-}BCD}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times DE=\dfrac{1}{3}$.

习　题　九

1．选择题

（1）D　（2）C　（3）B　（4）C　（5）B　（6）D　（7）C

（8）D　（9）C　（10）A　（11）B　（12）D　（13）B　（14）A

（15）C　（16）D　（17）B　（18）B　（19）B

2．填空题

（1）60　（2）18　（3）15　（4）-1　（5）48　（6）$\dfrac{119}{190}$

（7）$\dfrac{8}{15}$　（8）0.04　（9）30　（10）0.2

3.（1）$C_7^3=35$　（2）$C_2^1C_6^3+C_2^2C_6^2=55$　（3）$C_5^4+C_3^1C_5^3=35$

4.（1）所求的概率是 $\dfrac{A_7^7A_2^2}{A_8^8}=\dfrac{10\,080}{40\,320}=\dfrac{1}{4}$．提示：捆绑法.

（2）所求的概率是 $\dfrac{A_6^6A_7^2}{A_8^8}=\dfrac{30\,240}{40\,320}=\dfrac{3}{4}$．提示：插空法.

（3）所求的概率是 $\dfrac{A_2^2A_3^3A_4^4}{A_7^7}=\dfrac{288}{5040}\approx0.057$．提示：捆绑法，男的为一组，女的为一组.

（4）所求的概率是 $\dfrac{A_2^2A_4^4A_4^4}{A_8^8}=\dfrac{1152}{40\,320}\approx0.029$．提示：分两种情况：①最左边排男生；②最左边排女生.

5．解：（1）二项式系数最大的项是：$T_5=C_8^4\times2^{8-4}\times(-3x)^4=90\,720\,x^4$.

（2）由二项展开式的通项公式得 $T_{m+1}=C_8^m2^{8-m}(-3x)^m=C_8^m2^{8-m}(-3)^mx^m$，

令 $m=3$，则含有 x^3 的项的二项式系数为 $C_8^3=56$.

（3）令 $x=1$，则所有项的系数之和为 $(2-3)^8=1$.

6．解：（1）样本中男生人数为 60，由分层抽样比例为 5%估计全校男生人数为 1200.

（2）由统计图知，样本中身高在 170～185 cm 之间的学生有 15+13+10+5+2=45（人），

样本容量为100，所以样本中学生身高在170～185 cm之间的频率 $f=\frac{45}{100}=0.45$，故由 f 估计该校学生身高在170～185 cm之间的概率为 P_1=0.45．

（3）样本身高在180～185 cm之间的男生有10人，样本身高在185～190 cm之间的男生有5人，从上述15人中任选2人共有不同的选法为 C_{15}^2=105（种），从上述15人中任选2人至少有1人身高在185～190 cm之间的不同的选法为 $C_{10}^1C_5^1+C_5^2=60$（种）.

所以，至少有1人身高在185～190 cm之间的概率为 $P_2=\frac{60}{105}=\frac{4}{7}$.

7．解：试验的基本事件总数为 $n=C_7^3=35$，

（1）随机事件 A=“恰有1件是次品”，所包含的基本事件数为 $m=C_3^1\cdot C_4^2=18$，则恰有1件是次品的概率为 $\frac{18}{35}$.

（2）随机事件 B=“至少有2件是次品”=“抽到2个或3个次品”，

所以随机事件 B 所包含的基本事件数为 $m=C_3^2\cdot C_4^1+C_3^3\cdot C_4^0=13$，

则至少有2件是次品的概率为 $\frac{13}{35}$.

（3）随机事件 C=“有3件次品”，所以随机事件 C 所包含的基本事件数为 $C_3^3=1$，

则有3件次品的概率为 $\frac{1}{35}$.

测 试 题 九

一、选择题

1．B　2．D　3．A　4．A　5．B　6．D　7．C　8．C
9．B　10．D　11．D　12．A　13．B　14．A　15．B　16．C
17．C　18．B　19．D　20．B

二、填空题

21．90　22．96　23．$70x^{-2}$　24．0.14　25．40

三、解答题

26．（1）$4A_4^4=96$　（2）$A_4^2A_4^4=288$　（3）$A_2^2A_2^2A_4^4=96$　（4）$A_3^3A_4^3=144$

27．（1）$\frac{1}{10}$　（2）$\frac{1}{10}$　（3）$\frac{4}{25}$　（4）$\frac{7}{10}$

28．（1）$\overline{x}_{甲}$=7，$\overline{x}_{乙}$=7.

（2）$s_{甲}$≈1.73，$s_{乙}$≈1.10.

由此看出，乙的成绩比甲的成绩稳定一些，从成绩的稳定性考虑，可以选择乙参赛.

综合检测题（一）

一、选择题

1．C　2．C　3．A　4．D　5．C　6．D　7．B　8．D　9．C

10．D　11．C　12．C　13．C　14．C　15．D　16．D　17．B　18．A
19．B　20．B

二、填空题

21．2　22．$-\dfrac{31}{17}$　23．$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$　24．12π　25．75

三、解答题

26．提示：设 $MA=MB=PC=PD=x$，则 $AQ=NC=80-x$，$BN=DQ=60-x$，设平行四边形 $ABCD$ 的面积为 y．则

$y=80\times 60-2\times\dfrac{1}{2}x^2-2\times\dfrac{1}{2}(80-x)(60-x)=-2(x-35)^2+2450$，$(0<x<60)$，

当 $x=35$ cm 时，$y_{\max}=2450\ \text{cm}^2$.

27．解：（1）依题意可得 $\begin{cases}a_1q=1\\ a_1q^2+a_1q^3=12\end{cases}$，解得　$a_1=\dfrac{1}{3}$，$q=3$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=\dfrac{1}{3}\times 3^{n-1}=3^{n-2}$.

（2）因为 $b_n=\log_3 a_n=\log_3 3^{n-2}=n-2$，

所以$\{b_n\}$是以 $b_1=-1$ 为首项，公差 $d=1$ 的等差数列，

所以数列$\{b_n\}$的前 20 项的和 $S_{20}=(-1)\times 20+\dfrac{20\times 19}{2}\times 1=170$.

28．提示：$BD\perp$平面 AEC.

29．解：（1）因为函数 $y=2\sin x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)+\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}&=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x+\sqrt{3}\\&=\sin 2x+\sqrt{3}(1-2\sin^2 x)\\&=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\\&=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

所以，函数的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）因为 $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

所以，当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$ 时，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，

函数的最小值 $y_{\min}=-\sqrt{3}$.

30．提示：（1）双曲线的方程 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$；

（2）解方程组$\begin{cases}|\overrightarrow{PF_1}|+|\overrightarrow{PF_2}|=10\\ |\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|=4\end{cases}$得　$|\overrightarrow{PF_1}|=7$，$|\overrightarrow{PF_2}|=3$，

而焦距$|\overrightarrow{F_1F_2}|=8$.

由余弦定理求得　$\cos\angle F_1PF_2=-\dfrac{1}{7}$，

由向量内积的定义得

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|\cdot\cos\angle F_1PF_2=7\times3\times\left(-\dfrac{1}{7}\right)=-3$.

综合检测题（二）

一、选择题

1．B　2．B　3．D　4．A　5．A　6．A　7．D　8．A

9．A　10．B　11．D　12．B　13．C　14．C　15．B　16．D

17．D　18．B　19．B　20．D

二、填空题

21．1　22．1.95　23．4π　24．$\dfrac{\pi}{3}$　25．120°

三、解答题

26．解：$a_1=\dfrac{16}{3}$，$q=-\dfrac{3}{2}$.

27．解：（1）因为函数$f(x)=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）是指数函数，

所以函数的最值在区间$[-3,5]$的端点上取得，

所以由$a^{(-3)}\times a^5=a^2=\dfrac{1}{4}$，解得　$a=\dfrac{1}{2}$.

（2）因为$a=\dfrac{1}{2}$，所以不等式$\log_{\frac{1}{2}}(4-2m)\geqslant1$，

等价于$0<4-2m\leqslant\dfrac{1}{2}$，解得　$\dfrac{7}{4}\leqslant m<2$.

所以实数m的取值范围为$\left[\dfrac{7}{4},2\right)$.

28．解：（1）连接AC，交BD于点O，连接SO，EO，

因为E，O分别为SC，AC的中点，所以$EO/\!/SA$，

又$EO\subset$平面SDE，$SA\not\subset$平面SDE，

所以$SA/\!/$平面BED.

（2）由题意知SO为正四棱锥的高，侧棱与底面所成的角是45°，故$\angle SAO=45^\circ$，

因为$AB=2$ cm，故$SO=AO=\sqrt{2}$ cm，故$V=\dfrac{1}{3}\times2\times2\times\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$（$\text{cm}^3$）.

29．解：设$BD=x$ km，在$\triangle ABD$中，由余弦定理得

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD$，

$=14^2+10^2-2\times14\times10\cdot\cos60^\circ=156$，

所以$BD=2\sqrt{39}$，

由正弦定理知 $\dfrac{BD}{\sin\angle DAB}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$，即 $\dfrac{2\sqrt{39}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{14}{\sin\angle ADB}$，

所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$，所以 $\cos\angle ADB=\dfrac{\sqrt{39}}{26}$，

因为$\angle ADB+\angle CDB=90^\circ$，

所以 $\sin\angle CDB=\cos\angle ADB=\dfrac{\sqrt{39}}{26}$，

在$\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\angle CDB}=\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}$.

所以 $BC=2\sqrt{39}\times\dfrac{\sqrt{39}}{26}\times\dfrac{1}{\sin\ 135^\circ}=3\sqrt{2}\approx 4.2$（km）.

所以两景点 B 与 C 的直线距离约为 4.2 km.

30．解：（1）由题意知 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，即 $a^2=2b^2$.

以原点为圆心，以椭圆的短半轴长为半径的圆的标准方程为 $x^2+y^2=b^2$.

因为此圆与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切，所以 $b=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}}=1$.

因此 $a^2=2$，$b^2=1$，故椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）由题意知直线 AB 与 x 轴一定不垂直，它的斜率 k 一定存在，设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

解方程组 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，

消去 y 并整理得

$$(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0.$$

因为直线 AB 与椭圆有两个交点，

所以 $\Delta=(-8k^2)^2-4(1+2k^2)(8k^2-2)>0$，

整理得 $k^2-\dfrac{1}{2}<0$，解得 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 k 的取值范围是 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

由题意知 x_1，x_2 是一元二次方程 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-2=0$ 的两个根，于是有 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$，

$x_1\cdot x_2=\dfrac{8k^2-2}{1+2k^2}$，

所以 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(\dfrac{8k^2}{1+2k^2}\right)^2-4\times\dfrac{8k^2-2}{1+2k^2}=\dfrac{8-16k^2}{(1+2k^2)^2}$，

又 $(y_1-y_2)^2=[k(x_1-2)-k(x_2-2)]^2=k^2(x_1-x_2)^2$，

所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+k^2(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

由此得 $(1+k^2)\bullet\dfrac{8-16k^2}{(1+2k^2)^2}=\dfrac{20}{9}$，

整理得 $56k^4+38k^2-13=0$，

解得 $k=\pm\dfrac{1}{2}$，又因为 $k\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，因此直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ 或 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

综合检测题（三）

一、选择题

1．C　2．D　3．A　4．D　5．D　6．C　7．B　8．C　9．C
10．B　11．C　12．C　13．A　14．D　15．A　16．B　17．A　18．B
19．A　20．B

二、填空题

21．$a>1$　22．7　23．27π　24．7　25．15

三、解答题

26．提示：（1）因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$，所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，$\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）因为 $f(x)=\sqrt{3}\cos x+2\cos A\sin x=\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以最大值为 2，

此时 $x\in\left\{x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

27．解：若选择甲公司，每月的工资构成等差数列 $\{a_n\}$，则 $a_1=1500$，公差 $d=100$，一年的总收入为 $S_{甲}=12\times1500+\dfrac{12\times11}{2}\times100=24\,600$（元）.

若选择乙公司，每月的工资构成等比数列 $\{b_n\}$，则 $b_1=1000$，公比 $q=1+10\%=1.1$，一年的总收入为 $S_{乙}=\dfrac{1000\times(1-1.1^{12})}{1-1.1}\approx21\,384.28$（元）.

因为 $S_{甲}>S_{乙}$，所以小明应选择甲公司.

28．解：（1）因为对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+4)=f(-x)$，则函数图像的对称轴为 $x=2$，

又因为函数图像经过点$(1,\ -1)$和点$(0,\ 2)$，

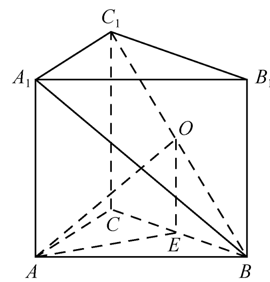
所以 $\begin{cases}a+b+c=-1\\c=2\\-\dfrac{b}{2a}=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=2\end{cases}$，所以函数的解析式为 $f(x)=x^2-4x+2$.

（2）因为 $f(x)\leqslant7$，所以 $x^2-4x+2\leqslant7$，即 $x^2-4x-5\leqslant0$，

解得 $-1\leqslant x\leqslant5$.

所以 x 的取值集合为 $[-1,\ 5]$.

29．如答图 7 所示，（1）解：在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，因为 $A_1C_1//AC$，
所以 AC 与 BC_1 所成的角，就是 A_1C_1 与 BC_1 所成的角．
连接 A_1B，因为 $C_1A_1\perp$ 平面 A_1ABB_1，$A_1B\subset$ 平面 A_1ABB_1，
所以 $C_1A_1\perp A_1B$．所以 $\triangle C_1A_1B$ 是直角三角形．
在 $\triangle C_1A_1B$ 中，$C_1A_1=1$，$C_1B=\sqrt{C_1B_1{}^2+BB_1{}^2}=\sqrt{A_1C_1{}^2+A_1B_1{}^2+BB_1{}^2}=\sqrt{3}$，
所以 $\cos\angle A_1C_1B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．
所以，AC 与 BC_1 所成角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．
（2）证明：取 BC 的中点为 E，连接 OE 和 AE，
因为 $OE//CC_1$，所以 $OE\perp BC$，
因为 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $AE\perp BC$，
因为 $OE\cap AE=E$，所以 $BC\perp$ 平面 OAE．
因为 $AO\subset$ 平面 OAE，所以 $BC\perp AO$．



答图 7

30．解：（1）因为双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$，所以双曲线为等轴双曲线，
可设双曲线方程为：$x^2-y^2=\lambda$，又因为双曲线经过点$(2，-\sqrt{2})$，
解得　$\lambda=4-2=2$，所以双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$．
（2）不妨设 $F_1(-2，0)$，$F_2(2，0)$，
因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm x$，且点 M 在第一象限，
所以可设 $M(a，a)\ (a>0)$，又因为 $MF_1\perp MF_2$，
所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=(-2-a)(2-a)+(-a)(-a)=-4+a^2+a^2=0$，
所以 $a=\sqrt{2}$，即 $M(\sqrt{2}，\sqrt{2})$．
（3）$2\sqrt{2}$

综合检测题（四）

一、选择题

1．B　2．A　3．D　4．C　5．C　6．C　7．D　8．A　9．C
10．B　11．D　12．C　13．C　14．C　15．D　16．B　17．C　18．D
19．C　20．B

二、填空题

21．$4\sqrt{2}$　22．$\dfrac{1}{2}$　23．$\dfrac{32}{\pi}$　24．5　25．3

三、解答题

26．解：设原计划 1～3 月份产量分别为 $a-d$，a，$a+d$（$d>0$）台，实际上 2 月、3 月的产量分别为 $a+10$，$a+d+25$ 台，根据题意得

$$\begin{cases}(a+10)^2=(a-d)(a+d+25)\\ a+d+25=\dfrac{1}{2}[(a-d)+a+(a+d)]-10\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}a=90\\ d=10\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=20\\ d=-25\end{cases}$（舍去），

即原计划每个月的产量分别是 80 台、90 台、100 台.

27．解：当 $a>1$ 时，由题意知 $a^3=64$，解得 $a=4$；

当 $0<a<1$ 时，由题意知 $a^{-2}=64$，解得 $a=\dfrac{1}{8}$，或 $a=-\dfrac{1}{8}$（舍去）.

综上 $a=4$，或 $a=\dfrac{1}{8}$.

28．解：（1）$y=2\sin x\cos x=\sin 2x$，

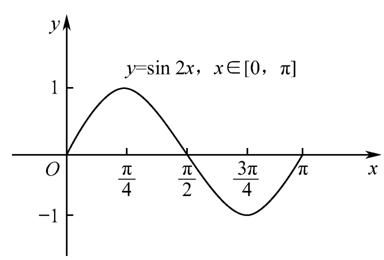
所以 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，$y_{\max}=1$，$y_{\min}=-1$.

（2）列表见答表 2.

答表 2

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	0	1	0	-1	0

描点作图，得到函数在 $[0,\pi]$ 一个周期上的简图，如答图 8 所示.



答图 8

29．解：（1）因为 $AD//BC$，所以 $\angle SAD$ 即为 SA 与 BC 所成的角，在 $\triangle SAD$ 中，$SA=SD=2$，又在正方形 $ABCD$ 中，$AD=AB=3$，

所以 $\cos\angle SAD=\dfrac{SA^2+AD^2-SD^2}{2SA\cdot AD}=\dfrac{2^2+3^2-2^2}{2\times2\times3}=\dfrac{3}{4}$，

所以 SA 与 BC 所成角的余弦值是 $\dfrac{3}{4}$.

（2）因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，在正方形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，所以 $AB\perp$ 平面 SAD，又因为 $SD\subset$ 平面 SAD，所以 $AB\perp SD$.

30．解：（1）由题意知 $|PF_1|-|PF_2|=4-2=2a$，故 $a=1$.

又因为 $PF_1\perp PF_2$，故 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4^2+2^2=20=(2c)^2$，故 $c=\sqrt{5}$，

故 $b^2=c^2-a^2=(\sqrt{5})^2-1^2=4$，

故 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$.

（2）因 $c=\sqrt{5}$，故 $F_1(-\sqrt{5}，0)$，又直线 l 的法向量为 $(1，-1)$，

故直线 l 的方程为 $x-y+\sqrt{5}=0$.

（3）设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

解方程组 $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=1 \\ x-y+\sqrt{5}=0 \end{cases}$，消去 y 得　$3x^2-2\sqrt{5}x-9=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$，$x_1x_2=-3$，

$y_1y_2=(x_1+\sqrt{5})(x_2+\sqrt{5})=x_1x_2+\sqrt{5}(x_1+x_2)+5=\dfrac{16}{3}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3+\dfrac{16}{3}=\dfrac{7}{3}$.

综合检测题（五）

一、选择题

1．D　2．A　3．C　4．D　5．A　6．B　7．B　8．B　9．B
10．C　11．A　12．B　13．D　14．C　15．B　16．C　17．D　18．C
19．C　20．A

二、填空题

21．480　22．$-\dfrac{5}{13}$　23．$16\sqrt{3}$　24．2　25．4π

三、解答题

26．（1）$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x-2$　（2）$(-\infty，-4)\cup(1，+\infty)$

27．解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意得

$\begin{cases} 2a_1+2d=8 \\ 2a_1+4d=12 \end{cases}$，　解得　$a_1=2$，$d=2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+2(n-1)=2n$.

（2）由（1）可得 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{(2+2n)n}{2}=n(1+n)$，

因为 a_1，a_k，S_{k+2} 成等比数列，所以 $a_k^2=a_1 S_{k+2}$，

从而$(2k)^2=2(k+2)(k+3)$，即 $k^2-5k-6=0$.

解得 $k=6$ 或 $k=-1$（舍去），因此 $k=6$.

28．解：（1）因为 $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以函数的最大值为 2，最小值是−2，最小正周期是 π.

（2）当 $x\in\left\{x\middle|x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时函数有最大值；当 $x\in\left\{x\middle|x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$ 时函数有最小值.

29．证明：如答图 9 所示，过点 B 作 $BE//AC$，$BE\cap$平面$\alpha=E$，

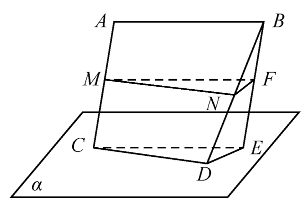
连接 CE，因为 $AB//$平面α，$AB\subset$平面 $ABEC$，

且平面 $ABEC\cap$平面$\alpha=CE$，所以 $AB//CE$.

取 BE 的中点 F，连接 MF，则 $MF//CE$；

连接 DE，因为 NF 是$\triangle BDE$ 的中位线，

所以 $NF//DE$.



答图 9

又因为 $MF\cap NF=F$，$CE\subset$平面α，$DE\subset$平面α，$DE\cap CE=E$，所以平面 $MNF//$平面α. 又因为 $MN\subset$平面 MNF，所以 $MN//$平面α.

30．解：（1）设双曲线的方程是 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

因为椭圆的左、右顶点分别是$(-2，0)$，$(2，0)$，所以双曲线的左、右焦点分别是$(-2，0)$，$(2，0)$，则 $c=2$.

又因为$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，所以椭圆的左、右焦点分别是$(-\sqrt{3}，0)$，$(\sqrt{3}，0)$，则双曲线的左、右顶点分别是$(-\sqrt{3}，0)$，$(\sqrt{3}，0)$，因此 $a=\sqrt{3}$.

所以 $b^2=2^2-(\sqrt{3})^2=1$，则双曲线的方程是 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

（2）设 A，B 分别是（x_1，y_1），（x_2，y_2），

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+\sqrt{2}\\ \dfrac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$ 整理得 $(1-3k^2)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{6\sqrt{2}k}{1-3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-9}{1-3k^2}$，则 $y_1y_2=(kx_1+\sqrt{2})(kx_2+\sqrt{2})=\dfrac{2-3k^2}{1-3k^2}$.

$\overrightarrow{OA}=(x_1，y_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2，y_2)$，因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=17$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=17$，即

$\frac{-9}{1-3k^2}+\frac{2-3k^2}{1-3k^2}=17$,

解得　$k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为$(-6\sqrt{2}k)^2-4\times(-9)\times(1-3k^2)=18$，则$\Delta>0$.

所以 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.